Filosofia

de la

Numeracion

ó

Descubrimiento

de un nuevo mundo

científico

por

D. Vicente Pujals de la Bastida

SEIS
Y SEIS
SON
DIEZ

Dozenal Society of America
http://www.dozenal.org

Republished by

The Dozenal Society of America
http://www.dozenal.org

La Sociedad Dozenal de América es un voluntario corporación educativa sin fines de lucro, organizada por la conducta de la investigación y la educación del público en el uso de dozenal (también llamado duodecimal o base de doce) en cálculos, matemáticas, pesos y medidas, y otras ramas de la ciencia pura y aplicada.

Este documento fue publicado originalmente en 1098; (1844.), y por consiguiente es de dominio público. Muchas gracias á Google Books (http://books.google.com) para hacer que el texto disponible en la Internet. Este remasterizada versión fue ofrecida al mundo por la Sociedad Dozenal de América en 11ƐƐ (2015.). Versión 1.0.

Numeración en este documento es como siguiente, tal como se practica por el autor:
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ↊ ᔭ 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 1↊ 1ᔭ 20 21…

Índice general

Es propiedad particular, y cada ejemplar llevar su número y esta rúbrica.

Al Señor D. Vicente Pujals,
ministro real honorario

El sistema de las propiedades esenciales de los números no es obra mia; pero lo he descubierto, y puedo dedicarlo. Este descubrimiento es el primer fruto de aquella paciencia inimitable de V., para hacerme entender en mi niñez las reglas de la aritmética, y de aquel celo constante con que V. se empeñaba en aficionarme al estudio. Al dedicar á V., como lo dedico, el sistema natural de los números, manifestando al mundo que á V. se debe tan importante descubrimiento, estoy muy lejos de pensar que de este modo queden recompensados tantos afanes y desvelos por mi educacion é instruccion. Ojalá que á lo menos quedasen así bien espresados el agradecimiento de su discípulo y el amor y respeto de su humilde hijo.

Vicente.

Prólogo

En toda esta obra se irán encontrando novedades mas ó menos importantes, hijas de mi deseo de presentar al mundo con la mayor claridad dos descubrimientos que he hecho, uno muy deseado de sabios matemáticos, y otro de una importancia tan universal, que en cierto modo puede llamarse el pitipié del plan general de las obras del Criador. Como he podido arrancar á la naturaleza este gran secreto, es cosa que reservo para su tiempo.

No hace muchos años que se halló el modo de disponer la numeracion escrita, eligiendo por base el número que se quiera desde el dos en adelante, segun el cual se llama binaria, ternaria, tetráctica ó cuaternaria, quinaria, &c.; mas no se ha podido hacer hasta ahora comodamente operaciones aritméticas con ninguna de ellas como con la denaria, por ser esta la que se conforma con todas las numeraciones *verbales* que se han conocido desde Adan hasta nosotros, así en las tribus salvajes, como en las naciones mas cultas.

Mi primer descubrimiento es, pues, el modo de disponer en el instante la numeracion *verbal*, cualquiera rque sea el número que se elija por base desde el dos en adelante; y con la correspondiente escrita, arregladas las tablas de sumar y multiplicar, que son diferentes en cada numeracion, hacer luego toda clase de operaciones, de las que se hayan, aprendido por medio de la *denaria*, sin que sea necesario haber profundizado la aritmética.

Mi segundo descubrimiento es el sistema natural de los números ó sea de sus propiedades esenciales ó bien de su natural composicion, que es lo mismo. Este sistema dispuesto por la Eterna Sabiduría consiste en que el órden, relaciones y combinaciones de dichas propiedades se hallan y se repiten siempre del mismo modo en cierta porcion de cualesquiera números seguidos y colocados circularmente.

Llamo numeracion natural una coleccion de signos articulados ó escritos y el modo de combinarlos para espresar ó representar los números, conformandose con el sistema de sus propiedades esenciales. Ya, pues, se deja entender, que sin haber hecho los dos indicados descubrimientos, jamas hubiera podido disponer de palabra la numeracion natural.

Conocido el último grado de perfeccion á que puede llegar el arte de espresar los números, parece que debe saberse toda su historia, con cuyo motivo esplico *á los aprendices de aritmética* el orígen, artificio y grados de utilidad de cuantas numeraciones se han dispuesto y pueden disponerse. Mas esto no es bastante; porque los inteligentes me dirian: *No puede negarse que es admirable esa numeracion natural, por la armoniosa correspondencia que se descubre entre los números, ni que seria la mas útil, porque sus signos espresan á la vez el número y sus propiedades esenciales; pero ¿las ventajas que nos ofrece, pueden compensar el inmenso trastorno que causaría su establecimiento?* La respuesta a esta pregunta es la que me ha empeñado en demostrar la imperiosa necesidad que hay de establecer la numeracion natural tan luego como sea posible. Todo esto no puede comprenderse sino bajo el titulo de *Filosofía de la numeracion.*

Dicho establecimiento formará sin duda un nuevo mundo cientifico, no solo por el gran trastorno que debe causar en el comercio y en todas las ciencias y artes en cuanto tienen relacion con los números, sino tambien porque el sistema natural de ellos, siendo tal vez la primera *ciencia perfecta* que se descubre, no puede menos que ser muy útil para llegar á conocer la perfeccion de otras y quizá de todas las demas, de que los hombres pueden ser capaces. Habiendo pasado muchos años en esta empresa, creo que tengo derecho á manifestar, como lo hago en los últimos capítulos, el camino que en mi concepto debe seguirse; y como en ellos y en otras partes de esta obra pudiera tal vez creerse que hago menos caso de autores muy respetables, me parece oportuno decir aquí lo que pienso acerca de la autoridad en general.

„Es preciso buscar las primeras ideas de lo verdadero y de lo bello, dice un filósofo, no en los libros ó tratados de los antiguos, sino en la naturaleza, en cuyo seno invariable las hallaron aquellos; y es constante que ella paga con usura los trabajos que se toman en consultarla." Otro autor se esplica de este modo: „Antes de proceder al descubrimiento de una verdad, el filósofo se despoja un instante de las opiniones adquiridas, para trasportarse al primer origen de los conocimientos, sacudir el yugo de las autoridades, y llevar la desconfianza basta el exámen de los principios en favor de los cuales está prevenido mas fuertemente." Estas dos sentencias necesitan esplicacion; porque pueden entenderse de un modo demasiado estenso, en particular por aquellos á quienes agrada tanto esto de *sacudir el yugo*, cualquieraque sea.

Se puede prescindir de una autoridad particular, porque no basta la esperiencia y la razon de un hombre solo; tambien de la general ó de muchos, cuando la razon de su creencia ó decision no se funda en la esperiencia, en la observacion de la naturaleza, en una evidencia uniforme de sentimiento ó de deduccion: no es razon el alfanje; ni el principio caprichoso que se admite como cierto solo porque nos alhaga, aunque se oponga al órden natural de las cosas; de aquí viene que los goces que creiamos duraderos, son momentáneos ó poco tranquilos, causando siempre males que ho se reparan jamas; tampoco es razon la antigüedad de los medios ó principios que se adoptaron, porque se encontraron mas á mano para satisfacer algun deseo, ó salir de alguna dificultad. Así pues si alguno tiene fundamentos para creer que en las letras hay un órden natural; hara muy bien en preferirlo al que se ha adoptado generalmente, no habiendo hasta ahora ninguna razon para que á la A siga B, á esta la C, luego la D &c. De todo esto se deduce, que siendo una misma la esperiencia de todos los que hacen un buen uso de su razon, hemos hallado la verdad.

No es, pues, mi ánimo hacerme independiente de la autoridad general, como pudiera creerse, sino que se abandonen los elementos ó principios arbitrarios y se busquen los naturales. De nada sirven los que presento, mientras no se reconozcan por todos, siendo conformes los resultados de sus observaciones y esperiencias. Hablo con seguridad y firmeza, porque asi es preciso en una obra de esta clase; pero es tanto lo que desconfio de mi talento, que no escribo para el público, sino obligado por la poderosa razon de que habiendo consultado los mejores autores, no he visto siquiera indicadas las verdades que he encontrado, supliendo con la constancia mi escasez de conocimientos, y porque ocultar una verdad útil, es hacerse tan culpable como el propagador de mentiras que perjudican.

Si alguno quisiere tomarse el trabajo de manifestar los defectos y tal vez los errores, que no deben faltar en una obra tan dificil como esta, puede estar seguro de que agradeceré íntimamente sus lecciones, porque las necesito; si acerca de ellas me ocurriere alguna dificultad, se la diré con la sencillez y respeto que debe hacerlo un discípulo.

Capitulo I

Que es número y que es numeracion.

Generalmente se cree que fué Eúclides el primero que dijo: *Número es toda coleccion de unidades de una misma especie*; pero de aqui se deduce que no lo es el uno, porque no es coleccion de unidades; cuando no podemos prescindir de tenerlo por tal, y cuando la esperiencia acredita que lo es, porque tiene su lugar en la escala (nada menos que el primero), sirve para los mismos objetos, y entra en las mismas combinaciones que los demas. Con las repeticiones de un número cualquiera, se pueden componer infinitos, y esta propiedad general tambien la tiene el *uno*.

Si se quisiera sostener que *número binario* es toda coleccion de doses y *número ternario* toda coleccion de treses, nos veriamos obligados á convenir en que no es *binario* el dos, siendo el primero de los binarios; ani ternario el tres, que es el primero de los ternarios; así como admitida la definicion de Eúclides, nos vemos precisados á conceder que no es número el uno, cuando no podemos negar razonablemente que es el primero de los números: luego son arbitrarias estas definiciones, y es necesario prescindir de ellas.

Dice Newton que el *número es la razon ó relacion abstracta de una cantidad cualquiera á otra de su misma especie que hayamos elegido por medida ó unidad*. Acerca de esta definicion se ha dicho que los términos en que está concebida no son bastante conocidos, para que se la pueda colocar al principio de un tratado elemental de aritmética. Si no se niega primero, que la unidad es número; segundo, que no podemos medir, si no sabemos numerar; tercero, que se llama cantidad el número conocido ó no conocido, de modo que una cantidad de agua es un número de gotas, de botellas, de barriles, y cuarto, que se llama razon ó relacion el número de veces que una cantidad contiene á otra; se sigue que no podemos tener idea de unidad, ni de medida, ni de cantidad, ni de razon ó relacion numérica, si antes no la tenemos del número, y por consiguiente nada esplica la definicion de *Newton*; es un círculo vicioso.

El hallarse ó considerarse á un tiempo y distintamente cada cosa de la misma especie en el todo ó conjunto, esto es número; de modo que si distinguimos cada cosa, por ejemplo, cada árbol, sin llegar á componer todo, ó si vemos ó consideramos algun todo sin distinguir cada cosa de que se compone, nos quedarémos sin saber cual es el número. Estas observaciones nos conducen á la siguiente definicion.

Número es la distincion de cada cosa de la misma especie que hay en el todo. Cuando ya tenemos idea de él, podemos concebirlo abstractamente, esto es, sin considerar cosa alguna de las que pudieran componerlo; así como la superficie, la extension, la dureza, no existen realmente sino en los cuerpos, y sin embargo podemos concebirlas, haciendo abstraccion de todo cuerpo.

Se llama pues *número abstracto* el que se forma en la mente, sin considerar ninguna otra cosa, como cuando decimos el *uno*, el *veinte y cinco*, y *concreto* cuando se espresan ó consideran las cosas de que se compone, como *cuatro hombres*, *cinco libros*.

Uno es el número de lo que por sí solo compone el todo, ó el número del todo que consideramos como objeto solo, aunque conste de muchas cosas. Si el soldado solo compone el todo, es uno, mientras que la compañía que consta de muchos soldados tambien es una, si no hay con ella en el todo otra compañía. Es necesario que tengamos idea de este número para tenerla de la *unidad*, cuya verdadera definicion es la cualidad ó propiedad que tiene alguna cosa de componer *uno*, como la dualidad de componer *dos*, la trinidad de componer *tres*, &c. No hubieran dicho algunos autores que es indefinible la *unidad*, si hubiesen considerado que se deriva de uno, y que se llama así el primero de los números.

Cuando las cosas que componen el todo no pasan de cuatro, podemos verlas á un tiempo distintamente, con lo cual ya tenemos idea de número; en seguida observamos que el todo puede constar de mas ó menos cosas, formando así números diferentes, y procedemos á comparar y medir, que es el modo de percibir los demas: viendo seguidamente tres y dos ó cuatro y uno percibimos el cinco.

Escala numérica es el órden de los números, siguiendo á cada cual su inmediato mayor. Esta escala no tiene término, ó mas bien dicho, tiene el término que se quiera; pues por grande que sea el último número, se puede formar otro mayor, añadiendo la unidad.

Numeracion es cualquiera coleccion de signos simples y primitivos, y el modo de derivar ó componer otros de ellos, y de combinarlos todos para poder espresar facilmente el número que nos ocurra por grande que sea. En rigor debiera representarse cada uno por un solo signo; pero esto es imposible, porque no formamos ideas de números mayores, sino por medio de combinaciones de signos, que corresponden á otros menores de que aquellos se componen.

A la dificultad de elegir y retener muchos signos, se atribuye la invencion del artificio con que por medio de muy pocos primitivos podemos espresar todos los números imaginables; mas no lo creo así, porque esta dificultad se advierte, cuando ya sabemos numerar.

Los dedos presentados de modo que se vean *distintamente*, son los primeros signos de los números; mas luego que entran los hombres en la carrera de la civilizacion, tienen que hacer operaciones aritméticas con mucha frecuencia, y necesitan espresarlos con la misma facilidad y prontitud. que otras cosas. Así es que sin tener ninguna idea de sistema ni artificio numérico, y tratando de satisfacer su deseo, convienen en alguna palabra, como *uno* para el número representado naturalmente por el dedo índice, y en otra para cada cual de los que se pueden representar de una vez por los dedos de ambas manos: de aquí viene que el número de estos dedos es la base de todas las numeraciones verbales y escritas que se han practicado desde Adan hasta nosotros.

Uno de los descubrimientos importantes de los dos últimos siglos es el de escribir todos. los números imaginables sin emplear mas que dos cifras, ó empleando las que se quiera desde dos en adelante. Estas diferentes numeraciones escritas se han llamado *aritmética* binaria, ternaria, tetráctica ó cuaternaria, quinaria &c. segun las cifras que se emplean; pero no es necesario saber mucho para comprender, que hay tanta distancia de la numeracion escrita á la aritmética, como del arte de leer á la gramática.

Dichas numeraciones se han llamado tambien *escalas* aritméticas binaria, ternaria, cuaternaria &c. Esta es otra impropiedad; porque escala no significa relaciones ni combinaciones, sino una simple sucesion gradual. La de los números es única y no puede haber otra, mientras que las numeraciones escritas pueden ser tantas como se quiera, y con cada una de ellas se escriben los números, siguiendo el órden de su escala.

Algunos sabios han dicho *sistema* binario, ternario &c.; pero si examinamos atentamente el artificio con que se espresan los números de palabra ó por escrito, hallarémos que es una combinacion de dos sistemas muy distintos.

Un plan ó disposicion de enlaces ó relaciones que se observa ó se repite siempre del mismo modo, es lo que generalmente se entiende por sistema; y los mas sabios matemáticos modernos han llamado *sistema numérico* un órden de potencias, que esplicaré brevemente. Todo número puede ser raiz ó primera potencia: multiplicado por sí mismo, produce la segunda (que mas comunmente se llama cuadrado); multiplicada esta por la misma raiz, produce la tercera (que se llama cubo), y multiplicando sucesivamente cada potencia por la primera, se producirán la cuarta, la quinta, la sexta &c. Siendo pues el 2 la raiz, será 4 la segunda potencia; 8 la tercera; 16 la cuarta… Siendo el 3 la primera, será 9 las segunda; 27 la tercera; 81 la cuarta… Si es el 4 la primera, será 16 la segunda, 64 la tercera; 256 la cuarta &c.

El primero de los dos sistemas de toda numeracion es un órden de potencias, las cuales en este caso toman el nombre de unidades compuestas, á diferencia del número *uno* que es la unidad simple, natural ó absoluta : dichas potencias son números compuestos de otros, y por consiguiente en rigor no son unidades, sino que se consideran tales para facilitar la espresion de los números.

El que forma la primera potencia ó unidad compuesta se llama diez; el de la segunda ciento; el de la tercera mil; el de la cuarta diez mil, &c.; de suerte que cada unidad se compone de diez veces la que le precede, siendo el uno el orígen de todas.

Llamo *generativo* este sistema, porque sirve para producir nuevas unidades indefinidamente; y la coleccion de los números seguidos desde el principio de la escala hasta el diez, es lo que llamo *base generativa*.

Cada unidad deberia espresarse con una sola palabra primitiva; mas como no es fácil, y al fin las confundiriamos, es necesario clasificarlas. Este es pues el orígen del otro sistema de que consta toda numeracion, y que llamo *espositívo*, porque nos manifiesta muy facilmente la relacion de cada unidad con cualquiera de las otras.

La base del sistema espositivo que se ha adoptado generalmente consta de seis unidades, tres primordiales y tres millares; unas y otras se repiten con las mismas denominaciones en varios géneros; que no pueden ser muchos, porque desde el tercero en adelante no es fácil imaginar sus números.

Llamo género natural el que se funda en el número uno, que es la unidad natural ó propiamente dicha; género de millones, de billones, de trillones.… aquel cuya unidad primordial sea un millon, un billon &c. Para poder imaginar mas facilmente los números del tercer género en adelante es necesario advertir, que si se considera raiz ó primera potencia un millon, es un billon la segunda, un trillon la tercera, un cuatrillon la cuarta, y así las demas.

En la base espositiva de la numeracion francesa no hay especies, sino solo tres grados de unidades, que pueden ser millares, de millones, de billones, de trillones &c.; de que se sigue, primero, que estos números considerados potencias de mil, estan mal espresados; porque un millon es la segunda, un billon la tercera, un trillon la cuarta &c.; y segundo, que el número mil millones es en Francia un billon; un billon es un trillon; mil billones un cuatrillon; de suerte que desde mil millones en adelante es otra la numeracion francesa.

En la base espositiva de la griega y de la china tampoco habia especies, sino cinco grados de unidades, como se verá despues.

Tabla
de la clasificacion de las unidades ó sea del sistema espositivo de la numeración actual.

Grados.	*Especies.*	*Generos*
Unidad.	Primordial	Natural, de millones, de billones, de trillones etc.
Decena.		
Centena.		
Unidad.	Millar...	
Decena.		
Centena.		

La invencion de signos verbales, escritos ó cualesquiera otros; la eleccion de la base generativa y la clasificacion de las unidades constituyen la numeracíon de tal modo, que será muy diferente, ó mejor dicho, será otra, si se hace la mas pequeña variacion en cualquiera de las tres cosas.

Queda pues demostrado, que la coleccion de signos y el modo de coinbinarlos para espresar los números, no debe llamarse aritmética, ni escala, ni sistema; sino solo *numeracion* verbal ó escrita segun sean los signos. Tampoco debe calificarse con las palabras *binaria*, *ternaria*, *cuaternaria &c.*, porque siempre es denaria, como se verá mas adelante.

Capitulo II

De la numeracion verbal.

El mejor modo de adquirir ideas de los números es tocando ó á lo menos viendo distintamente las cosas de la misma especie que componen ó deben componer algun todo; es decir, contando materialmente. Muchos de los que han aprendidos á decir las palabras que corresponden á los guarismos, no tienen ideas tan perfectas de los números doscientos mil, trescientos mil &c. como aquellos que no saben leer y se ocupan en contar ladrillos. No debe enseñarse la numeracion escrita y mucho menos la aritmética, sin que el alumno conozca la numeracion verbal, teniendo una perfecta idea de los números que espresa, lo que podrá facilitarse con el siguiente método.

Luego que sepa las palabras *uno*, *dos*, *tres*, &c. hasta *diez*, se le dirá que haga diez montones de diez granos ó monedas, y se le ejercitará en contar estos montones, diciendo: diez, veinte, treinta &c. hasta ciento, haciéndole entender despues, que veinte significa dos dieces… treinta tres dieces, cuarenta cuatro dieces.… y ciento diez dieces.

Con estos antecedentes sabrá decir la escala desde uno hasta ciento, advirtiéndole que á cada número de decenas se van añadiendo por su órden los de unidades simples, de modo que habiendo llegado al diez, continuará diciendo: diez y uno, diez y dos, diez y tres &c. hasta diez y nueve, y como sigue diez y diez que son dos dieces, dirá veinte, y sigue veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres &c. hasta completar otra decena, que con las dos precedentes componen treinta, al cual siguen treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres &c.; asi se irá llegando á los demas números de decenas, y por consiguiente es necesario decir diez veces la escala de uno á diez, para llegar á ciento. Luego se le hará entender, que en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro y diez y cinco se dice *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, y *quince*.

Si se le hace formar diez montones de cien granos cada uno, y que los cuente con las palabras ciento, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos… mil; no habrá necesidad de repetir esta leccion, para que tenga una perfecta idea de cada número de centenas, y sin hacerle decir la escala desde uno hasta mil, se penetrará de ella, con solo advertirle que á cada número de centenas se van añadiendo por su órden los de la escala de uno ciento, de modo que esta deberia decirse diez veces para llegar á mil.

Al ensayar este método con dos niños, observé que no solo cuando estaban juntos, sino tambien cada uno en su casa preferian á todo otro juego ó entretenimiento el de contar granos de maiz, haciendo montones como les habia esplicado, componiendo con ellos los números que se proponian, de modo que por via de juego se puede enseñar á los niños la numeracion verbal desde que saben hablar.

Este método se continuará, haciendo entender del mejor modo posible las reglas ó nociones siguientes:

1. Los grados de las unidades son tres; el primero se denomina con la misma palabra unidad, el segundo es de decenas y el tercero de centenas.

2. Si se consideran diez montones cada uno de mil granos, se tendrá idea del número diez mil, cien montones serian cien mil.

3. Los tres grados de unidades pueden ser primordiales ó millares. Los números de una y otra especie se espresan con las mismas palabras, añadiendo mil á los de unidades millares, como dos mil, treinta mil, cuatrocientos mil; de lo contrario se entiende que son primordiales.

4. Si se consideran mil montones cada uno de mil granos, se tendrá idea de un millon; de suerte que para llegar á este número, seria necesario decir mil veces la escala desde uno hasta mil.

5. Si se considera un millon de montones cada uno de un millon de granos, se tendrá idea de un billon; un millon de billones es un trillon; un millon de trillones un cuatrillon &c. Cada uno de estos números, así como el *uno*, es fundamento de un género de seis unidades, tres primordiales y tres millares, que se denominan y se cuentan del mismo modo, añadiendo la palabra millones, ó billones ó trillones &c., para distinguir su género, cuando no es el natural.

6. Cada unidad se compone de diez veces la que le precede: luego no puede haber mas que diez números de unidades iguales ó de un mismo grado, especie y género; pero el último es el primero de un grado superior. Los que se forman de unidades simples, terminan en el diez que es el primero de decenas; diez dieces ó ciento es el último de decenas y el primero de centenas; diez cientos ó mil es el último de centenas y el primero de unidades millares &c.

7. Aunque son diez los números que se pueden formar de unidades iguales, solo se consideran nueve; porque el último se espresa siempre como primero de unidad superior.

8. Todas las palabras de la numeracion verbal castellana son las de la tabla siguiente.

Números de unidades.	de decenas.	de centenas.	fundamentales.
Uno.	Diez.	Ciento.	Millon.
Dos.	Veinte.	Doscientos.	Billon.
Tres.	Treinta.	Trescientos.	Trillon.
Cuatro.	Cuarenta.	Cuatrocientos.	Cuatrillon.
Cinco.	Cincuenta.	Quinientos.	Quintillon.
Seis.	Sesenta.	Seisicentos.	Sexillon.
Siete.	Setenta.	Setecientos.	Setillon.
Ocho.	Ochenta.	Ochocientos.	Octillon.
Nueve.	Noventa.	Nuevecientos.	Novillon.
			Decillon.
	Mil.		

9. Cada palabra de la tabla precedente corresponde á un número, y sirve para espresar muchísimos otros, combinándose con las demas.

10. Número decimal es todo el que forma unidad, como uno, diez, ciento, mil, diez mil, &c.

11. Número redondo se llama desde el diez en adelante todo el que consta de un solo grado, especie y género, como cuarenta, seiscientos mil, nuevecientos mil millones.

12. Los números redondos que se espresan con una sola palabra son los de decenas y centenas primordiales naturales, como noventa, quinientos, ochocientos; los que se espresan con dos palabras son los de millares naturales, como sesenta mil, y los de primordiales de

los demas géneros, como tres millones, cuarenta billones, quinientos trillones, y los que es necesario espresar con tres palabras son los de la especie millar de todos los géneros menos del natural, como cuatro mil millones, sesenta mil billones, setecientos mil trillones.

13. Son números de un grado los de la base y los redondos, porque constan de unidades de un solo grado, especie y género: y son de dos grados, de tres, de cuatro, &c. los que constan de unidades de dos, tres, cuatro ó mas órdenes diferentes por su grado, especie ó género. Son, pues, de dos grados los siguientes: veinte y tres, que consta de decenas y de unidades simples; cuatro mil y ocho, que consta de unidades millares y de unidades simples; trescientos mil millones y doscientos mil, que consta de centenas millares de dos géneros diferentes. El número doscientos treinta y cuatro mil quinientos sesenta y siete es de seis grados, tres millares y tres primordiales del mismo género natural.

14. Cuando en un mismo número hay unidades millares de grados diferentes, no se añade la palabra mil á la de cada grado, sino solamente á la última de las del mismo género, de modo que en lugar de trescientos mil cuarenta mil y cinco mil se dice trescientos cuarenta y cinco mil. Asimismo las palabras millones, billones, trillones &c. no se añaden sino cuando se han espresado todos los grados y especies de unidades de un mismo género, como dos mil treinta y cuatro billones quinientos sesenta y siete mil ochocientos noventa y un millones.

15. La escala de los números no tiene término, pero debe fijarse en el decillon; porque no es fácil ni hay necesidad de espresar otros géneros, y porque el número mayor que se ha escrito no pasa de novillones.

16. Las palabras numéricas primitivas son doce, las diez de la base y estas dos *ciento* y *mil*; las derivadas son diez y nueve, ocho de decenas de veinte á noventa, una de centenas que es quinientos y las diez fundamentales millon, billon &c.; de la palabra *vice* (lo que está en segundo lugar) derivaron los latinos *vicies*, *viceni y viginti* y los castellanos *veinte*; de la latina *quini* (cada cinco) se deriva *quinientos*; millon se deriva de mil, y billon de *bis* (dos veces): las compuestas son las de centenas, esceptuando ciento y quinientos.

Se ha dicho que la aritmética es el fundamento de las ciencias matemáticas, porque las relaciones de todas. las especies. de cantidades se reducen finalmente á números; pero estaria mejor dicho, que todas las ciencias matemáticas se reducen á la primera, que es la aritmética, y que el fundamento de esta, y por consiguiente de las demas, es la numeracion, parte de la gramática, sin la cual no hay *aritmética.* Esta palabra griega significa ciencia de los números, y así se ha definido hasta ahora, *el arte de hallar números por medio de otros, con que se esplí- can las condiciones que deben tener los que se buscan.* No está, pues, bien definido este arte con la palabra aritmética.

A cualquiera que no conozca las cifras ni las letras, pero que sepa muy bien la numeracion verbal y las tablas de sumar y multiplicar, propóngasele cuestiones primero sencillas y despues la que se quiera de aritmética inferior, y se verá que las resuelve por medio de signos que elige: luego nada tiene de estraño que los romanos despues de mucha práctica, resolviesen cuestiones dificiles con sus *cálculos* ó piedras; los griegos y los chinos con ensartas de cuentas; en varios pueblos de América, del Africa y del Asia con cordeles anudados; en la India con los dedos, y en el Perú con diferentes hileras de granos de maiz, con mas exactitud y prontitud que los europeos con la pluma.

Para resolver las cuestiones aritméticas, que no son demasiado sencillas, se necesitan dos numeraciones: la verbal con que se hacen operaciones parciales, y la de signos escritos ú otroscon que se fijan estos resultados, que han de componer al fin los números que se buscan. Luego no debe enseñarse la aritmética, mientras que el alumno no sepa perfectamente la numeracion verbal y las tablas de sumar y multiplicar, por cuyo medio se obtienen los resultados parciales. La numeracion escrita ó cualquiera otra de signos que puedan fijarse, es indispensable como un ausilio para la memoría; porque no es posible retener dichos resultados y continuar el cálculo. Es pues uno mismo el secreto para hacer operaciones aritméticas de memoria, y para hallar los números totales sin necesidad de operaciones parciales.

Capitulo III

De la numeracion regular, perfecta y *braquíloga* ó sea verbal abreviada.

Todo está hecho con número, peso y medida; mas no puede graduarse el peso ni la medida sin el número: luego este es el principio ó base del órden universal, como dijo Pitágoras, y existe antes de todo en el entendimiento divino. Allí hay mas órden, donde el número de las cosas está mas á la vista ó puede hallarse mas facilmente. Debe pues evitarse aun el mas pequeño desórden en el modo de espresar los números y en todo lo que conduce al mejor conocimiento de ellos. La imperfeccion, la confusion, la impropiedad, la irregularidad prueban falta de órden, y si existen en la numeracion ó en las palabras técnicas con que se esplica su artificio, seria conveniente hacerlas desaparecer.

Al intento he manifestado ya la impropiedad con que á la numeracion se ha llamado *aritmética, escala, sistema*; he dicho *decena millar* y *centena millar*, considerando nombre adjetivo esta palabra millar, pues de lo contrario deberia decirse decena ó centena *de millares*; he dicho tambien decena de millones y no de millon, que tengo por un solecismo.

La numeracion será perfecta, siempre que no haya mas ni menos signos simples y primitivos que los siguientes: uno para cada número de la base generativa menos para el último, á los cuales llamaré *signos de escala*; uno para cada grado y para cada especie de unidades que componen la base espositiva, á los cuales llamaré *signos de unidades*, y uno *genérico* que uniéndose á los de escala, sirve para indicar los géneros que siguen al natural. No hay necesidad de otros signos que los mencionados, los cuales pueden emplearse simples ó compuestos; pero esta composicion no debe ser sino de uno de escala con otro de unidades ó con el genérico: luego cuantos números se espresen con signos que no sean de los indicados, ó apartándose de las reglas generales para combinarlos, son otras tantas irregularidades. Esto supuesto, no será dificil examinar las de la numeracion castellana. Los signos de escala de esta son las palabras desde uno hasta nueve inclusives; los de unidades son: del primer grado el no ser de decenas ni de centenas; el de decenas la terminacion *nta* de los signos de escala; el de centenas la palabra *ciento*; el de la especie primordial, no ser millar; el de la especie millar la palabra mil, y el genérico la terminacion *illon*.

Son pues irregulares *diez y veinte*: cuyos números siendo de decenas debieran espresarse con las palabras unenta y duenta ó doenta derivadas de uno y dos, como treinta de tres, cuarenta de cuatro &c. Esta observacion es de Condorcet apoyada por Lacroix.

Son irregulares, como ya he manifestado, once, doce, trece, catorce y quince; porque la regla general es que á las palabras de decenas sigan las de unidades, como treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres &c.

Es irregular la palabra quinientos, porque segun la regla general de los números de centenas deberia decirse cincocientos.

Son irregulares millon y billon, porque deberia decirse unillon y dosillon ó dillon (segun Lacroix y Vallejo) derivados de uno y dos. La palabra *millon* deberia corresponder á la potencia mil del número unillon.

Aunque sea inútil pensar en la correccion de estas anomalías, no está demas conocerlas. Y como á pesar de esto, puede suceder que no vean algunos con toda claridad como se enlazan y combinan los dos sistemas generativo y espositivo, me propuse presentar un ejemplo de numeracion verbal regular y perfecta, á cuyo pensamiento se unió el de ensayar el modo de espresar con *una sola palabra* los diferentes grados de unidades de un mismo género que tenga un número, aunque sean los seis, en cuyo caso se espresa ahora con siete ú ocho palabras, como ciento y veinte y tres mil cuatrocientos cincuenta y seis millones.

Los signos de escala, que elegí para esta numeracion braquíloga son las letras consonantes N, D, T, K, F, S, L, Y, V, que corresponden por su órden á los números de uno á nueve, y los de unidades ó sea de la base espositiva son los siguientes: para el primer grado el sonido *ut*; para la decena *et*, para la centena *at*, y para la especie millar *it*. Anteponiendo á las vocales de cada uno de estos signos aquellas consonantes, se espresarán los números de unidades iguales con las palabras monosílabas de la tabla siguiente:

		ESPECIE PRIMORDIAL.			
Unidad.		*Decena.*		*Centena.*	
Nut,	uno.	Net,	diez.	Nat,	ciento.
Dut,	dos.	Det,	veinte.	Dat,	doscientos.
Tut,	tres.	Tet,	treinta.	Tat,	trescientos.
Kut,	cuatro.	Ket,	cuarenta.	Kat,	cuatrocientos.
Fut,	cinco.	Fet,	cincuenta.	Fat,	quinientos.
Sut,	seis.	Set,	sesenta.	Sat,	seiscientos.
Lut,	siete.	Let,	setenta.	Lat,	setecientos.
Yut,	ocho.	Yet,	ochenta.	Yat,	ochocientos.
Vut,	nueve.	Vet,	noventa.	Vat,	nuevecientos.
		ESPECIE MILLAR.			
Unidad.		*Decena.*		*Centena.*	
Nit,	un mil.	Neit,	diez mil.	Nait,	cien mil.
Dit,	dos mil.	Deit,	veinte mil.	Dait,	doscientos mil.
Tit,	tres mil.	Teit,	treinta mil.	Tait,	trescientos mil.
Kit,	cuatro mil.	Keit,	cuarenta mil.	Kait,	cuatrocientos mil.
Fit,	cinco mil.	Feit,	cincuenta mil.	Fait,	quinientos mil.
Sif,	seis mil.	Seit,	sesenta mil.	Sait,	seiscíentosmil.
Lit,	siete mil.	Leit,	setenta mil.	Lait,	setecientos mil.
Yit,	ocho mil.	Yeit,	ochenta mil.	Yait,	ochocientos mil.
Vit,	nueve mil.	Veit,	noventa mil.	Vait,	nuevecientos mil.

Cuando el género no es el natural, en cuyo caso es necesario espresarlo, se unirá el sonido *ot* á la consonante que corresponde, y asi *not* significará millones, *dot* billones, *tot* trillones &c.

El objeto de la *t* final es evitar que se equivoquen las palabras de esta numeracion con otras de la lengua castellana, en que tal vez no llegan á cinco las que terminan con dicha letra. Siendo la y la que menos se halla al fin de las palabras en las lenguas europeas y quizá en todas, deberia preterirse á la t, si hubiera de ser universal la numeracion braquíloga. Ya se entenderá, pues, que debe suprimirse dicha final, siempre que la vocal no sea la última de la palabra, por cuya razon en lugar de *net-it* diez mil he dicho *neit*, en lugar de *nat-it* cien mil *nait*, &c. De este modo se pronunciarán muy facilmente dichas palabras, cuando han de espresar números de dos ó mas grados, cada uno de los cuales corresponderá á una sílaba de dos letras. Cuando son dos sílabas, debe pronunciarse larga la primera, como *sénit* sesenta y un mil; *dávit* doscientos nueve mil: cuando son tres, cuatro, cinco ó seis sílabas, se pronunciará larga la antepenúltima, como *fáseyut* quinientos sesenta y ocho; *láiyavet* setecientos mil ochocientos noventa; *takeifáselut* trescientos cuarenta mil quinientos sesenta y siete; *nadetifakésunot* ciento veinte y tres mil quinientos cuarenta seis millones. Las sílabas que corresponden á unidades de distinto género, deben formar otra palabra, como *káinot filet* cuatrocientos mil millones cinco mil y setenta.

Las vocales a, e, o, son las que mas se encuentran al fin de las palabras en todas las lenguas, con cuyo motivo he procurado que sean la *u* y la *i* las que con mas frecuencia se hallen al fin de las numéricas, prefiriendo la una para espresar el primer grado de unidades, y la otra para la especie millar.

Siendo la vocal *a* mas abierta y mas grave que la *e*, he preferido esta para la decena y aquella para la centena, quedando para indicar el género la *o*, que al mismo tiempo es la que campea en las palabras *millones*, *billones*, *trillones &c.*

En lugar de *nuit* un mil, *duit* dos mil, *tuit* tres mil, &c.... he dicho nit, dit, tit.... suprimiendo la *u*, porque las unidades millares que no son de decenas ni de centenas, son necesariamente del primer grado. Así tambien debe suprimirse la *i* de las decenas y centenas millares, cuando siguen unidades de otro grado y del mismo género que la tienen, de modo que en lugar de *neisit* se dirá *nesit* diez y seis mil; en lugar de *naiteit* se dirá *nateit* ciento treinta mil.

No debe atenderse tanto á la figura de la letra como á su pronunciacion. He empleado la *k* porque se pronuncia igualmente con todas las vocales, lo que no sucede con la *c*; pero bien puede escribirse *quécut* en lugar de *kékut* cuarenta y cuatro. Lo que en castellano se escribe *nut*, *dut*.... puede escribirse en francés *nout*, *dout*, pronunciándose del mismo modo.

La numeracion *braquíloga* bien dispuesta ofrece tres ventajas: primera, hacer ver con mas claridad el enlace de los dos sistemas de que consta toda numeracion; segunda, espresarse con una sola palabra los diferentes grados y especies de unidades de un mismo género, y tercera, poder hacerse universal con mucha mas facilidad que ninguna otra.

Capitulo IV

Numeraciones escritas de los antiguos.

Se llama *ortografía* el arte de escribir con un signo para cada vocal y para cada consonante; *braquigrafía* ó *taquigrafía* con un signo para cada sílaba, y cuando es con un signo para cada idea ó palabra, se llama *ideografía*.

Toda escritura tiene uno de estos dos objetos ó ambos á la vez: primero, comunicar nuestros pensamientos, cuando no podemos ó no basta comunicarlos de palabra, y segundo, conservarlos sin necesidad de fatigar nuestra memoria. Ademas de estas dos utilidades principales, cada una de las tres artes indicadas tiene la suya particular, no menos importante si se logra su perfeccion. Solo por medio de la ortografia se pueden escribir todas las palabras de una lengua, sin emplear mas que de veinte á treinta signos ó letras; solo por medio de la *taquigrafía* se consigue pintar las palabras tan pronto como se pronuncian, y solo por medio de la *ideografía* se podria conseguir la escritura universal, que cada uno lea en su lengua sin necesidad de entender la del escritor: este arte, que no es imposible, no se conoce aun en Europa, sino para escribir los números.

Las primeras ideas que tenemos necesidad de fijar por medio de signos, son sin duda las de los números, ya sea para conservar constantes los que nos interesan, ó ya para sacar aquellas cuentas sencillas y comunes que tan amenudo se nos ofrecen desde que nos hallamos en sociedad; quizá fué un número lo primero que se escribió.

Luego que los hombres tienen algunos grados de civilizacion,. advierten la facilidad que hay de escribir los números con un signo para cada idea, y así se hace siempre que algun motivo muy poderoso no obliga á emplear todas las letras de las palabras con que se espresan.

Cifra es todo signo escrito que por sí solo ó combinándose con otros, sirve para representar los números.

En todas las naciones antiguas menos en las de las Indias orientales, luego que tenian un alfabeto, daban valores numéricos á todas ó á la mayor parte de sus letras, representando cada una un numero de unidades del primer grado, de decenas ó de centenas, y por medio de un punto ó cualquiera otra señal se indicaba que eran millares.

Solo esplicaré las numeraciones escritas de los hebreos, griegos y romanos, cuya literatura es la mas interesante de la antigüedad, y haré mencion muy rápida de las demas de que tenemos noticia.

Los hebreos cuyo alfabeto es el mas antiguo que se conoce, tenian veinte y dos letras; pero cinco de sus consonantes se escribian con otras diferentes cuando eran finales; y de este modo se completaban las veinte y siete de la tabla siguiente.[1]

La letra *aleph* con dos puntos encima אֵ valia mil.

Escribiendo los hebreos de la derecha hácia la izquierda, seguían tambien hácia este lado las letras ó cifras de menos valor, como ןצז setecientos noventa y siete.

Las letras de unidades eran millares, cuando les seguia hácia la izquierda alguna de decenas ó de centenas, como םג nueve mil y cincuenta; וש seis mil y trescientos. En cualquier otro caso se escribia con todas sus letras la palabra que en hebreo significa mil.

[1]Tabla trasladó a la página 12. —Ed.

LETRAS HEBREAS
Y NÚMEROS QUE REPRESENTAN.

DE UNIDADES

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
Aleph.	א	uno.
Beth.	ב	dos.
Gimel.	ג	tres.
Daleth.	ד	cuatro.
He.	ה	cinco.
Vau.	ו	seis.
Zaijn.	ז	siete.
Cheth.	ח	ocho.
Teth.	ט	nueve.

DE DECENAS

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
Iod.	י	diez.
Caph.	ך	veinte.
Lamed.	ל	treinta.
Mem.	ם	cuarenta.
Nun.	ן	cincuenta.
Samech.	ס	sesenta.
Ain.	ע	setenta.
Pe.	פ	ochenta.
Tsade.	צ	noventa.

DE CENTENAS

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
Coph.	ק	ciento.
Resch.	ר	doscientos.
Sehin.	ש	trescientos.
Tau.	ת	cuatrocientos.
Caph.	ך	quinientos.
Mem.	ם	seiscientos.
Nun.	ן	setecientos.
Pe.	ף	ochocientos.
Tsade.	ץ	nuevecientos.

Los antiguos árabes escribian los números por el mismo estilo de los hebreos, con la diferencia de que la última de sus veinte y ocho letras representaba el número mil. Los sirios tenian veinte y dos, pero solo diez y ocho con valores númericos, nueve de unidades y nueve de decenas, que tambien podian ser de centenas, millares, decenas millares ó centenas millares por medio de puntos ó señales que les ponian encima ó debajo. Los armeníos tenian treinta y ocho letras, que correspondían por su órden á los números de unidades, de decenas, de centenas y de unidades millares, quedando dos sin valor numérico. Los georgianos tenian treinta y siete con los mismos valores de las de los armenios, sino es la última que valia diez mil. Los ilirios treinta y dos y los servitas cuarenta; pero no daban valores numéricos sino á veinte y ocho por el mismo estilo de los árabes, con la diferencia de escribir hácia la derecha las de menos valor. Estos dos alfabetos ilirio y servita se adoptaron en mas de sesenta provincias del Asia y de la parte oriental de Europa, esceptuando la Grecia, la Hungría y la Valaquia.

Los griegos tenian dos numeraciones escritas muy diferentes. La primera consistia en que las veinte y cuatro letras de su alfabeto correspondian á los números de uno á nueve menos el seis, á los de decenas de diez á ochenta, y á los de centenas de ciento á ochocientos. El seis era representado por un signo ó letra muy antigua que llamaban episema *vau* ó simplemente episema; el noventa por otro que llamaban episcma *kophe* y el nuevecientos por el episema *sampi*. En las medallas se empleaban letras mayúsculas.[2]

Estas letras no representaban números, sino cuando eran seguidas de un acento grave hácia arriba. Este mismo acento puesto debajo indicaba mil, como α̦ un mil, β̦ dos mil, μ̦ cuarenta mil.

La segunda numeracíon escrita de los griegos consta de las letras I, Δ, H, X, M correspondientes á cinco grados de unidades que forman su base espositiva, y de la Π que vale cinco, mitad de la decena. Estas seis letras son iniciales de las palabras Iα una, Πεντε cinco, Δεκα diez, Hεκατου ciento, Χιλια mil, Μυρια diez mil. Encajonadas dentro de la del cinco las letras Δ, H, X, M, valen cinco veces el número que representan, como 𐅄 cincuenta, 𐅅 quinientos: de este modo no habia necesidad de repeé tir una misma letra sino hasta cuatro veces, como IIII cuatro, XXXX cuatro mil.

Semejante á esta segunda numeracion escrita de los griegos dispusieron otra los romanos del modo siguiente: para, escribir los números de uno á cuatro eligieron la letra I que representa cada uno de los dedos de la mano menos el pulgar; la letra V para el cinco, porque presentando la mano abierta naturalmente para espresar este número, se forma la V entre el pulgar y el índice; la C y la M para los números ciento y mil, de cuyas palabras son iniciales; la L para el número cincuenta, por tener un solo brazo de los dos de la ⊏ que era C en el primitivo alfabeto latino, y la D ó IƆ para el número quinientos, considerándola mitad de ↀ ó CIƆ que era la antigua M.

Se ve pues que esta numeracion consta de una letra para cada uno de los tres grados de unidades, otra para la especie millar y otra para cada mitad de unidad.

Para no escribir una misma letra cuatro veces, dispusieron que la que tuviese hácia la izquierda otra menor, perdiese el valor de esta, como IV cuatro, XC noventa &c. Teniendo estas letras una línea encima, valian mil veces su número, como $\overline{\text{I}}$ mil, $\overline{\text{DC}}$ seiscientos mil, $\overline{\text{M}}$

[2]Tabla trasladó a la página 14. —Ed.

LETRAS GRIEGAS
Y NÚMEROS QUE REPRESENTAN.

DE UNIDADES

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
Alpha.	Α α'	uno.
Betha.	Β β'	dos.
Gamma.	Γ γ'	tres.
Delta.	Δ δ'	cuatro.
Epsilon.	Ε ϵ'	cinco.
Vau.	ς'	seis.
Zita.	Ζ ζ'	siete.
Ita.	Η η'	ocho.
Thita.	Θ θ'	nueve.

DE DECENAS

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
lota.	Ι ι'	diez.
Cappa	Κ κ'	veinte.
Lamda	Λ λ'	treinta.
Mu.	Μ μ'	cuarenta.
Nu.	V ν'	cincuenta.
Xi.	Ξ ξ'	sesenta.
Omicron	Ο ο′	setenta.
Pi.	Π π'	ochenta.
Kophe.	G ϟ′	noventa.

DE CENTENAS

Nombre.	*Figura.*	*Número.*
Rho.	Ρ ρ'	ciento.
Sigma.	Σ σ'	doscientos.
Tau.	Τ τ'	trescientos.
Ipsilon.	Υ υ'	cuatrocientos.
Phi.	Φ ϕ'	quinientos.
Chi.	Χ χ'	seiscientos.
Psi.	Ψ ψ'	setecientos.
Omega.	Ω ω'	ochocientos.
Sampi.	Ϡ ϡ′	nuevecientos.

un millon. Diez mil solia escribirse de este modo CCIƆƆ.

Se ha estrañado que los romanos hubiesen imitado la segunda numeracion de los griegos mas bien que la primera: ellos atendieron sin duda á que veinte y siete signos nose aprenden tan facilmente como siete.

Esta numeracion romana y la segunda de los griegos son imperfectas por defecto de signos de escala, por cuya razon no sirven para las operaciones aritméticas.

La primera numeracion de los griegos y todas las demas antiguas, escepto las de la China y la India, son imperfectas por esceso de signos de escala, siendo estos diferentes para cada uno de los tres grados de unidades.

Los chinos tienen trece palabras que corresponden á los números de uno á diez y á los tres que forman las unidades ciento, mil y diez mil; espresando cualquiera otro por una fácil combinacion de dos ó mas de estas palabras. Como no tenian ni tienen alfabeto, porque su escritura es ideográfica, habia trece signos que correspondían á aquellas palabras, y se colocaban uno debajo de otra segun el estilo antiguo. El que llamaban moderno consistia en que las trece cifras eran mas sencillas, se escribian de la izquierda hácia la derecha, y se empleaba ademas el cero, que nunca se ponia al fin, sino en el lugar que debiera ocupar la cifra del diez, de ciento ó de mil, hallándose entre otras dos. Esta numeracion es perfecta, porque consta de nueve signos de escala y uno para cada unidad, el cero es inútil, mas no perjudicial. La cifra del diez con la del *uno* encima solo valia diez; con la del dos era veinte; con la del tres treinta. . . : la de ciento con la del uno encima era un ciento; con la del dos doscientos &c.

Capitulo V

Origen de la numeracion escrita moderna.

La lengua de casi toda la India en la mas remota antigüedad era la *samscrita*, que poco á poco fué perdiendo el vulgo, conservándose solo entre los Brachmanes ó sacerdotes y ciertas familias distinguidas, que despues hicieron de ella un gran misterio. Su escritura es como la nuestra de la izquierda á la derecha y ortográficamente; pero tenian diez caractéres diferentes de las letras, con que escribian todos los números imaginables. Esta admirable invencion pasó sucesivamente á los Lamas ó sacerdotes del Tibet y de la Tartaria; á los sabios de Persia; á los de Siam; los árabes no la ignoraban en el siglo diez, y en el mismo siglo la llevaron á España, en donde hácia el año nuevecientos sesenta la aprendió el sabio francés Gerbert monje benedictino, que fué papa en nuevecientos noventa y nueve con el nombre de Silvestre segundo; mas no se hizo comun á toda la Europa hasta el siglo trece. Segun el P. Kirker y otros Alfonso X Rey de Castilla y de Leon en MCCLII fué quien propagó en toda la Europa las cifras llamadas arábigas por medio de sus tablas astronómicas.

Varios autores opinan que dichas cifras fueron inventadas por los griegos en el siglo sexto, que pasaron á la India muy á principios del octavo; de la India á los árabes hácia el año ochocientos y de estos á los españoles en eI siglo diez. Tambien se ha dicho que de la India pasaron á la Grecia en el siglo sexto por conducto diferente del de los árabes; pero todo esto carece de fundamento, con cuyo motivo se cree que hubo un particular empeño en negar á los árabes el honor de haber sido los primeros que trajeron á Europa tan importante descubrimiento. No puede negarse que siempre se han llamado arábigas las cifras europeas; así como los árabes llaman indianas las que ellos inventaron; lo que prueba que los europeos aprendieron de los árabes, y estos de la India el artificio de la numeracion con solo diez cifras cualesquiera que sean.

Los sabios de cada nacion o reino que llegaban á tener noticia de dicho artificio, variaban las cifras con el objeto de hacerlas misteriosas ó dificiles ó mas fáciles. Las que inventaron los árabes, eran mas conformes á su modo de escribir; el cinco era representado unas veces por el cero y otras por otro signo; en el primer caso empleaban el punto como cero, y en el segundo hacian de este signo el mismo uso que en la India.

En la tabla que precede[3] se vé, que las cifras europeas son las de Siam perfeccionadas, menos la del uno y la del nueve que son de los árabes. De aqui se sigue que Gerbert ó su discípulo Bernelin (que compuso cuatro libros con el titulo *De Abaco et numeris*) ó quien quiera que haya sido el autor de las cifras europeas, tuvo á la vista las arábigas y las de Siam. Falta saber si unas y otras fuéron llevadas á España al mismo tiempo, ó las unas á España y las otras á la Grecia por conductos diferentes.

La redondez ó circumferencia ó un movimiento semejante es el signo mas natural de reunion ó coleccion total. Luego es de presumirse, que el cero fué inventado por los indianos antiguos para representar el número diez, que es la coleccion de los dedos, y anteponiéndole

[3]Tabla trasladó a la página 18. —Ed.

CIFRAS SAMSCRITAS.

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

DE LOS LAMAS.

INDO-PERSAS.

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

DE SIAM.

๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗ ๘ ๙ ๐

ARÁBIGAS.

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

EUROPEAS.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

las otras cifras escribian 20 *dos diez*; 30 *tres diez* &c. hasta 100 diez diez, á cuyas dos cifras anteponiendo igualmente las otras, escribian 200 *dos diez diez*; 300 *tres diez diez &c.*, y por consiguiente debieron presentar con entera separacion los diferentes grados de unidades, como 400, 80, 5 cuatrocientos ochenta y cinco. Mas con estos principios y con la práctica no podian tardar en conocer mejor el mecanismo de la numeracion.

Acerca del uso y origen de las palabras cifra y cero hay opiniones muy diferentes entre los autores mas sabios: unos dicen que cero se deriva de *cyphra* con que los latinos llamaban al cero y no á los demas caracteres numéricos: otros, que son los legicógrafos latinos, nada nos dicen de la *cyphra*, y llaman *nota aritmética* todo caracter numérico y tambien el cero: otros aseguran que *cifr* en lengua samscrita significa *vacio*, y por esta razon se llamó así el cero, que representa el vacío dentro de una circumferencia: otros sostienen que *cifra* es todo signo escrito que por sí solo representa algun número, y por consiguiente el *cero* no es cifra, lo que hace un contraste muy original con la opinion de que solamente el cero se llamó cifra: otros dicen que *sifr* en hebreo y *sefra* en árabe significan número; luego este es el orígen verdadero de la palabra *cifra*.

Tambien se dice que *zer* entre los persas significa oro y moneda aunque no sea de oro. Cada cifra tiene el nombre del número que representa, como el *dos* ó la cifra del dos, el *tres* ó la cifra del tres &c. luego la que no representa ninguno por sí sola, debe denominarse con alguna palabra que no signifique número, y es muy consiguiente que por su figura redonda como las monedas se llamase tambien *zer* por los persas, de donde se deriva seguramente *zeroh* ó *zeruh*, que entre los árabes vecinos de los persas, significa *cero* y *anillo*.

Capitulo VI

Artificio indiano de la numeracion escrita.

Elegidas que sean las diez cifras, basta con ellas para escribir todos los números imaginables, y tambien; los que no pueden imaginarse. Este prodigio consiste en que cada una de las nueve por si sola es á un mismo tiempo signo de dos cosas diferentes: por su figura es de escala, porque representa un número, y por el lugar que ocupa indica el grado, especie y género de las unidades de este número. Estas nueve cifras se llaman positivas, á diferencia del cero que es negativa, porque léjos de representar número, indica no haber unidades del grado correspondiente al lugar que ella ocupa.

Generalmente se han adoptado las diez cifras europeas, que son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Cada cifra de estas estando sola ó en primer lugares de unidades, y siguiendo hácia la izquierda en segundo lugar es de decenas y en el tercero de centenas. Así pues la del uno sola ó en primer lugar vale uno, en el segundo es diez ó una decena y en el tercero un ciento: luego para escribir once que consta de diez y de uno, se pondrá la misma cifra en el segundo lugar y en el primero 11; y el número ciento y once que consta de una centena, una decena y la unidad simple, se escribirá con la misma cifra en los tres lugares 111. Estando la del dos sola ó en primer lugar, vale dos unidades, en el segundo es veinte ó dos decenas, y en el tercero doscientos, como 222 doscientos veinte y dos. Lo mismo debe entenderse de cualquiera otra cifra segun su número, como 999 nuevecientos noventa y nueve.

Bien entendido esto, facilmente se escribirá cualquier número que no pase de tres cifras: ochenta y tres consta de ocho decenas y tres unidades simples; luego debe escribirse con la del ocho en segundo lugar y la del tres en el primero 83; y al reves de este el treinta y ocho 38, porque consta de tres decenas y ocho unidades simples: seiscientos cincuenta y cuatro se escribirá con la cifra del seis en tercer lugar, la del cinco en el segupdo y la del cuatro en el primero 654.

Estando el cero en primer lugar indica que no hay unidades del primer grado, en el segundo que no hay decenas y en el tercero que no hay centenas. El uso del cero es indispensable para este modo de escribir los números, porque no puede quedar en segundo lugar una cifra de decenas, si no hay otra que ocupe el primero; pero esta no puede ser sino de unidades del primer grado; luego no habiendo de estas unidades, es indispensable que una cifra sin valor ó negativa, como el cero, determine el primer lugar, como 10 diez, 20 veinte, 30 treinta; y por la misma razon cuando no hay unidades ni decenas, se necesita un cero en primer lugar y otro en el segundo, para que pueda quedar en el tercero una cifra de centenas, como 100 ciento, 200 doscientos. Cuando hay unidades y centenas, pero no decenas, debe quedar el cero en medio de las dos cifras positivas, como 604 seiscientos cuatro; sin el cero seria 64 sesenta y cuatro.

El número escrito que no pasa de tres cifras, es de unidades primordiales del género natural. Si ademas de las tres hubiese alguna otra hácia la izquierda, corresponde esta á la especie millar, y debe separarse de las otras con un punto, como 5.243 cinco mil doscientos cuarenta y tres. Pero tambien hay decenas y centenas millares, y por consiguiente puede haber dos y tres cifras correspondientes á esta especie, como en los números 46.532 cuarenta y seis mil quinientos treinta y dos, y 321.987 trescientos veinte y un mil nuevecientos ochenta y siete.

Para que las cifras sean de la especie millar, es necesario que haya tres hacia la derecha, que correspondan á los tres grados de unidades primordiales, cuyos lugares deben llenarse con ceros cuando el número carece de estas unidades, como 1.000 un mil, 25.000 veinte y cinco mil, 50.008 cincuenta mil y ocho, 304.050 trescientos cuatro mil y cincuenta.

Guarismo es un número escrito, sea con una ó con muchas cifras. Para leer facilmente un guarismo de muchas cifras, se pondrán dos puntos á cada seis, empezando por la izquierda, y cada uno de estos períodos se dividirá en dos secciones por medio de un punto. Sobre los dos que siguen al primer período, se pondrá la cifra del uno; sobre los que siguen al segundo la del dos &c. en esta forman:

$$\overset{}{56}\overset{3}{:}789.012\overset{2}{:}345.678\overset{1}{:}901.234.$$

Empezando luego por la izquierda, se leerá cada seccion, como si fuese del todo independiente de las demas; pero donde hay dos puntos, se dirá millones, ó billones ó trillones, segun la señal de encima, y donde hay un punto, se dirá mil, mientras no sea final. El guarismo propuesto se leerá de este modo: cincuenta y seis trillones; setecientos ochenta y nueve mil, doce billones, trescientos cuarenta y cinco mil, seiscientos setenta y ocho millones; nuevecientos un mil, doscientos treinta y cuatro. Son de millones las cifras, cuando les sigue un período hácia la derecha, de billones si son dos, de trillones si son tres &c.

Guarismo simple debe llamarse el que consta de una sola cifra; *doble* si son dos; de una seccion ó de mas de una seccion si son tres ó mas de tres; de un período Sl son seis &c.

Los grados de un número son tantos como sus cifras *positivas*; 4, 50, 600 son de un grado: 12, 510, 600050 son de dos grados.

Si á un guarismo se añade hacia la derecha el cero ó cualquiera otra cifra, se sigue que la que estaba en primer lugar quedará en el segundo: luego esta y las que le siguen á la izquierda valdrán diez veces mas; por ejemplo, si al 5 se añade un cero será 50 cincuenta, añádase un 4 y será 504 quinientos cuatro, con otro cero mas será 5.040.

Esta nunieracion escrita es perfecta, porque consta de un signo para cada número de la base menos para el último, y los tres grados y dos especies en cada género que forman la base espositiva, se representan por tres lugares y dos secciones en cada período.

ERARD WEIGEL profesor de matemáticas en Ginebra publicó en el año 1.670 con el nombre de *Aritmética tetráctica ó cuaternaria* un modo de escribir los números, sin emplear mas que cuatro cifras: 0, 1, 2 y 3. El artificio de esta numeracion es el mismo de la indiana; pero no siendo las cifras sino cuatro, solo valen cuatro veces mas en cada lugar que adelantan hácia la izquierda; la del uno en el primero vale uno, en el segundo cuatro, en el tercero diez y seis, en el cuarto sesenta y cuatro &c.; la cifra del dos en el primer lugar vale dos, en el segundo ocho, en el tercero treinta y dos &c.

Aristóteles indica que en una provincia de Tracia se escribian los números con solo cuatro cifras; pero es de presumiirse que corresponderian á unidades ó mitades de unidades, como las letras de la numeracion romana y de la segunda de los griegos.

En 1.702 presentó Leibnitz á la academia de ciencias de Paris un modo de escribir los nú- meros sin emplear mas que dos cifras, la del uno y el cero. Esta numeracion que se ha llamado *escala ó aritmética binaria*, consiste en que la cifra del uno vale doble en cada lugar que adelanta hácia la izquierda, de modo que en el segundo es dos, en el tercero cuatro, en el cuarto ocho, en el quinto diez y seis &c.

El emperador Fohi, que segun los chinos vivia hace mas de cuatro mil años, y á quien ellos veneran como autor de las ciencias y fundador del imperio, dejó varios libros, de los cuales el tercero que llaman Ye-Kim, no contiene otra cosa que sesenta y cuatro combinaciones de una linea seguida y otra de puntos. Los chinos las miraban como un emblema de la historia de la naturaleza, de las causas de sus fenómenos, de los secretos de la adivinacion y de otras cosas por este estilo; hasta. que el P. Bouvet jesuita célebre nmisionero, á quien Leibnitz escribió su invencion, hizo ver que las combinaciones de dichas líneas eran las mismas que debian hacerse con la cifra del uno y la del cero, para escribir los números desde uno hasta sesenta y cuatro, correspondiendo la línea seguida al uno y la de puntos al cero.

A la invencion de Leibnitz se debe seguramente que otros matemáticos advirtiesen despues la facilidad de disponer la numeracion escrita con las cifras que se quiera desde dos en adelante. La de Leibnitz se llama *escala* ó *aritmética binaria*, espresando de este modo que su base es el número dos, y las demas se denominan *ternaria*, *tetráctica ó cuaternaria*, *quinaria*, *senaria*, *setenaria*, *octonaria*, *novenaria*, *denaria*, (que es la digital), *undenaria*, *dodenaria*, &c. segun el número de la base; pero hasta ahora no se ha podido hacer comodamente operaciones aritméticas, sino con la denaria, porque es la que se conforma con la numeracion verbal. El artificio de todas estas numeraciones escritas es el mismo de la denaria inventado en la India.

El número doce y sus compuestos son los únicos que se pueden dividir por dos, por tres y por cuatro, y este fué el motivo que tuvieron Buffon, DÁlembert y otros sabios, para afirmar que á la actual numeracion escrita debia preferirse la dodenaria ó de doce cifras, y para ensayar el modo de llevar al cabo tan árdua empresa, eligieron las siguientes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	Z.
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	diez,	once.

El número doce escrito segun esta numeracion es 10; el trece 11; el catorce 12; el quince 13; el veinte y cinco 14; el sesenta 50; el ciento 84. Pronto se vió que era imposible hallar un modo de espresan á primera vista segun la numeracion verbal actual un número escrito segun la dodenaria, porque cada una tiene distinta base, y no puede hacerse la reduccion sino por medio de una operacion que no es muy breve. Luego es imposible establecer una numeracion escrita diferente de la actual, si no se varia tambien el lenguaje numérico; pero se consideró que era tiempo perdido el que se emplease en querer variar este lenguaje.

Capitulo VII

Modo de disponer la numeracion verbal y escrita con las bases que se quiera.

Regla 1.ª Las unidades compuestas son siempre números de algun órden de potencias: luego esceptuando el *uno*, que es unidad simple, todo otro número puede ser fundamento de un sistema generativo de unidades compuestas.

2.ª Cualquiera que sea el órden de potencias que se elija, llámese diez la primera; ciento la segunda; mil la tercera; diez mil lacuarta, &c.

3.ª Los números de uno á nueve que pré- cedan al que se llame diez, conservarán sus nombres actuales; mas no los otros. Si, por ejemplo, fuere el seis la primera unidad compuesta, no hay necesidad de quitar sus nombres actuales á los números de uno á cinco, pero el seis debe llamarse diez; el siete once; el ocho doce; el nueve trece, &c.

4.ª Cuando la primera unidad compuesta es un número mayor que el diez digital, se han de inventar nombres primitivos que no pasen de dos sílabas, para espresar los números que se hallan entre el nueve y el nuevo diez, que es dicha unidad compuesta. Si se elige el que ahora se llama *quince*, llamándolo *diez*, será once el diez y seis; doce el diez y siete, &c.: luego es necesario inventar cinco palabras breves y primitivas, que correspondan á los números que en la numeracion digital se llaman diez, once, doce, trece y catorce.

5.ª Los números de uno á nueve que preceden al nuevo diez, serán representados por las mismas cifras que ahora, mas no los otros: si el cinco se escribe 10, el seis debe escribirse 11; el siete 12 &c.

6.ª Se designará una letra ó cualquiera otro signo á cada número de los que se hallan entre el nueve y el nuevo diez, cuando este es mayor que el diez digital. De esta regla y de la anterior se deduce, que cada número de los que preceden al diez debe escribirse con una sola cifra, y como ademas se necesita el cero, se sigue que en toda numeracion deben ser tantas las cifras como los números de su base generativa.

En lugar de once, doce, trece, catorce y quince diré diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro y diez y cinco, cuando así convenga para la mas fácil inteligencia de la

práctica de las reglas precedentes.

Si queremos que las unidades compuestas sean potencias del número que ahora es dos, lo llamarémos *diez*; luego su segunda potencia cuatro será *ciento*; la tercera ocho será *mil*, &c. Esta numeracion debe dedicarse á Leibnitz, que inventó el modo de escribir los números, sin emplear otras cifras que la del uno y el cero.

Es muy fácil continuar esta tabla hasta donde se quiera, habiendo entendido que su base generativa consta de dos números solamente, que son los que se pueden formar de unidades iguales, como uno y diez de las simples; diez y ciento de decenas; ciento y mil de centenas &c.

Para hacer toda clase de operaciones aritméticas por medio de la numeracion de Leibnitz, basta saber que uno y uno son diez y que una vez uno es uno.[4]

[4] Tabla trasladó a la página 22. —Ed.

Numeracion digital		*Numeracion Leibnitz*	
1	igual á	1	uno.
2	=	10	diez.
3	=	11	diez y uno.
4	=	100	ciento.
5	=	101	ciento y uno.
6	=	110	ciento y diez.
7	=	111	ciento diez y uno.
8	=	1.000	mil.
9	=	1.001	mil y uno.
10	=	1.010	mil y diez.
11	=	1.011	mil diez y uno.
12	=	1.100	mil y ciento.
13	=	1.101	mil ciento y uno.
14	=	1.110	mil ciento y diez.
15	=	1.111	ciento diez y uno.
16	=	10.000	diez mil.
17	=	10.001	diez mil y uno.
18	=	10.010	diez mil y diez.

EJEMPLO DE SUMAR

Numeracion digital		*Numeracion Leibnitz*	
5	igual á	101	Uno
7	=	111	y uno son diez,
5	=	101	y uno son once,
6	=	110	y cero son once,
5	=	101	y uno son ciento,
7	=	111	y uno son ciento y uno,
5	=	101	y uno son ciento y diez.
40.		101.000	

La primera columna de Leibnitz suma ciento y diez, que son once decenas, con las cuales se empezará la suma de la segunda, que asciende á ciento y diez decenas, ó sea once centenas, y con esta se empezará la suma de la tercera columna, que asciende a mil y diez centenas: luego la suma total es ciento y un mil, que equivale á cuarenta de la numeracion digital.

Habiendo sido el tres el número predilecto de Pitágoras, dedicaré á este gran filósofo la numeracion cuyas unidades compuestas son potencias de tres: luego los números de su base generativa se llamarán *uno*, *dos y diez*; y sus cifras serán 0, 1, 2.

Numeracion digital		*Numeracion pitagórica*	
1	igual á	1	uno.
2	=	2	dos.
3	=	10	diez.
4	=	11	diez y uno.
5	=	12	diez y dos.
6	=	20	veinte.
7	=	21	veinte y uno.
8	=	22	veinte y dos.
9	=	100	ciento.
10	=	101	ciento y uno.
11	=	102	ciento y dos.
12	=	110	ciento y diez.
13	=	111	ciento diez y uno.
14	=	112	ciento diez y dos.
15	=	120	ciento y veinte.
16	=	121	ciento veinte y uno.
17	=	122	ciento veinte y dos.
18	=	200	doscientos.
19	=	201	doscientos y uno.
20	=	202	doscientos y dos.
21	=	210	doscientos y diez.
22	=	211	doscientos diez y uno.
23	=	212	doscientos diez y dos.
24	=	220	doscientos veinte.
25	=	221	doscientos veinte y uno.
26	=	222	doscientos veinte y dos.
27	=	1.000	mil.
28	=	1.001	mil y uno.

Los números uno, dos y diez son los únicos de unidades simples en esta numeracion pitagórica; diez, veinte y ciento son los de decenas; ciento, doscientos y mil los de centenas; mil, dos mil y diez mil los de millares &c.

La tabla de sumar se reduce á estas proposiciones.

1 y 1 son 2; 1 y 2 ó 2 y 1 son 10; 2 y 2 son 11.

La tabla de multiplicar á estas otras.

1 vez 1 es 1; 1 vez 2 ó 2 veces 1 son 2; 2 veces 2 son 11.

Erard Weigel profesor de matemáticas en Ginebra se ocupó mucho en el modo de escribir los números con solo cuatro cifras 0, 1, 2, 3. Las unidades compuestas de esta numeracion son potencias de cuatro, y su base generativa consta de los números uno, dos, tres y diez.

Numeracion digital.		*Numeracion Weigel.*	
1	igual á	1	uno.
2	=	2	dos.
3	=	3	tres.
4	=	10	diez.
5	=	11	diez y uno.
6	=	12	diez y dos.
7	=	13	diez y tres.
8	=	20	veinte.
9	=	21	veinte y uno.
10	=	22	veinte y dos.
11	=	23	veinte y tres.
12	=	30	treinta.
13	=	31	treinta y uno.
14	=	32	treinta y dos.
15	=	33	treinta y tres.
16	=	100	ciento.
32	=	200	doscientos.
48	=	300	trescientos.
64	=	1.000	mil.
128	=	2.000	dos mil.
192	=	3.000	tres mil.
256	=	10.000	diez mil.

TABLAS DE LA NUMERACION DE WEIGEL.

DE SUMAR.

1	y	1	son	2.	2	y	1	son	3.	3	y	1	son	10.
1		2		3.	2		2		10.	3		2		11.
1		3		10.	2		3		11.	3		3		12.

DE MULTIPLICAR.

1	vez	1	es	1.	2	veces	1	son	2.	3	veces	1	son	3.
1		2		2.	2		2		10.	3		2		12.
1		3		3.	2		3		12.	3		3		21.

Si tuviésemos cinco dedos en una mano y cuatro en la otra, el número que ahora es nueve, seria la coleccion de los dedos y se llamaría diez. La base generativa de esta numeracion constaria de un número menos que la actual, y los números de unidades iguales serian uno menos, porque no habria nueve, ni noventa, ni nuevecientos &c. Despues de diez y ocho se diria veinte; despues de veinte y ocho treinta; despues de treinta y ocho cuarenta… y despues de ochenta y ocho ciento: luego se llamaría veinte el mismo número que ahora es diez y ocho ó dos veces nueve; se llamaría treinta, el que ahora es veinte y siete ó tres veces nueve; se llamaría cuarenta, el que ahora es treinta y seis ó cuatro veces nueve &c. El número ciento de esta numeracion seria el mismo que ahora es ochenta y uno, siendo el producto de nueve veces nueve, que entonces se diria diez veces diez.[5]

Si queremos que las unidades compuestas sean potencias del número que ahora es trece, le llamarémos diez; la segunda potencia que ahora es 169 se llamará ciento; la tercera que es 2.197 se llamará mil &c. Los números que ahora son 10, 11 y 12 serán llamados y representados con las letras *a*, *b*, *c*.[6]

Ya se habrá observado que así la tabla de sumar como la de multiplicar consta de tantos cuadros, y cada cuadro de tantas proposiciones cuantas son las cifras positivas de la respectiva numeracion: luego en las tablas que siguen de la numeracion propuesta,[7] debe haber tres cuadros mas y en cada cuadro tres proposiciones mas que en las tablas de la digital. Sin embargo, consultando la brevedad, he omitido en cada cuadro las proposiciones que se conforman con la nunieracion digital, como 4 y 4 son 8; 3 veces 3 son 9; y aquellas en que el número mayor se espresa antes que el menor, como 9 y 5 son 11; porque estas proposiciones se hallan donde el menor precede al mayor, como 5 y 9 son 11.

He dicho que toda numeracion es denaria; primero, porque el sistema decimal se funda en el de las unidades compuestas, que es un órden de potencias; luego cualesquiera que sean los números de estas, pueden formar un sistema decimal ó sea denario, y segundo, porque para disponer mas facilmente la numeracion verbal con la base generativa que se quiera, es

[5]Tablas de esta numeracion están en la página 25 and 26. —Ed.
[6]Tabla trasladó a la página 27. —Ed.
[7]Consulte la table en la página 28.—Ed.

Numerac. digital.		*Numerac. propuesta.*	*Numerac. digital.*		*Numerac. propuesta.*	*Numerac. digital.*		*Numerac. propuesta.*
1	igual á	1.	10	igual á	11.	27	igual á	30.
2	=	2.	11	=	12.	36	=	40.
3	=	3.	12	=	13.	45	=	50.
4	=	4.	13	=	14.	54	=	60.
5	=	5.	14	=	15.	63	=	70.
6	=	6.	15	=	16.	72	=	80.
7	=	7.	16	=	17.	81	=	100.
8	=	8.	17	=	18.	729	=	1.000.
9	=	10.	18	=	20.	6.561	=	10.000.

TABLAS DE LA NUMERACION

QUE TIENE POR BASE GENERATIVA EL 9 ACTUAL.

DE SUMAR.

1	y	1	son	2.	3	y	1	son	4.	5	y	1	son	6.	7	y	1	son	8.
1		2		3.	3		2		5.	5		2		7	7.		2		10.
1		3		4.	3		3		6.	5		3		8.	7		3		11.
1		4		5.	3		4		7.	5		4		10.	7		4		12.
1		5		6.	3		5		8.	5		5		11.	7		5		13.
1		6		7.	3		6		10.	5		6		12.	7		6		14.
1		7		8.	3		7		11.	5		7		13.	7		7		15.
1		8		10.	3		8		12.	5		8		14.	7		8		16.
2	y	1	son	3.	4	y	1	son	5.	6	y	1	son	7.	8	y	1	son	10.
2		2		4.	4		2		6.	6		2		8.	8		2		11.
2		3		5.	4		3		7.	6		3		10.	8		3		12.
2		4		6.	4		4		8.	6		4		11.	8		4		13.
2		5		7.	4		5		10.	6		5		12.	8		5		14.
2		6		8.	4		6		11.	6		6		13.	8		6		15.
2		7		10.	4		7		12.	6		7		14.	8		7		16.
2		8		11.	4		8		13.	6		8		15.	8		8		17.

DE MULTIPLICAR.

1	vez	1	es	1.	3	vez	1	son	3.	5	vez	1	son	5.	7	vez	1	son	7.
1		2		2.	3		2		6.	5		2		11.	7		2		15.
1		3		3.	3		3		10.	5		3		16.	7		3		23.
1		4		4.	3		4		13.	5		4		22.	7		4		31.
1		5		5.	3		5		16.	5		5		27.	7		5		38.
1		6		6.	3		6		20.	5		6		33.	7		6		46.
1		7		7.	3		7		23.	5		7		38.	7		7		54.
1		8		8.	3		8		26.	5		8		44.	7		8		62.
2	vez	1	es	2.	4	vez	1	son	4.	6	vez	1	son	6.	8	vez	1	son	8.
2		2		4.	4		2		8.	6		2		13.	8		2		17.
2		3		6.	4		3		13.	6		3		20.	8		3		26.
2		4		8.	4		4		17.	6		4		26.	8		4		35.
2		5		11.	4		5		22.	6		5		33.	8		5		44.
2		6		13.	4		6		26.	6		6		40.	8		6		53.
2		7		15.	4		7		31.	6		7		46.	8		7		62.
2		8		17.	4		8		35.	6		8		53.	8		8		71.

Numeracion digital.		*Numeracion propuesta.*	
1	=	1	uno
2	=	2	dos.
3	=	3	tres.
4	=	4	cuatro.
5	=	5	cinco.
6	=	6	seis.
7	=	7	siete.
8	=	8	ocho.
9	=	9	nueve.
10	=	a	a.
11	=	b	be.
12	=	c	ce.
13	=	10	diez.
26	=	20	veinte.
39	=	30	treinta.
52	=	40	cuarenta.
65	=	50	cincuenta.
78	=	60	sesenta.
91	=	70	setenta.
104	=	80	ochenta.
117	=	90	noventa.
130	=	a0	a-dieces.
143	=	b0	be-dieces.
156	=	c0	ce-dieces.
169	=	100	ciento.
338	=	200	doscientos.
507	=	300	trescientos.
676	=	400	cuatrocientos.
845	=	500	quinientos.
1.014	=	600	seiscientos.
1.183	=	700	setecientos.
1.352	=	800	ochocientos.
1.521	=	900	nuevecientos.
1.690	=	a00	a-cientos.
1.859	=	b00	be-cientos.
2.028	=	c00	ce-cientos.
2.197	=	1.000	mil.

TABLAS DE LA NUMERACION
CUYA BASE GENERATIVA ES EL 13 ACTUAL.

DE SUMAR.

1	y	9	es	a.
1		a		b.
1		b		c.
1		c		10.

2	y	8	son	a.
2		9		b.
2		a		c.
2		b		10.
2		c		11.

3	y	7	son	a.
3		8		b.
3		9		c.
3		a		10.
3		b		11.
3		c		12.

4	y	6	son	a.
4		7		b.
4		8		c.
4		9		10.
4		a		11.
4		b		12.
4		c		13.

5	y	5	son	a.
5		6		b.
5		7		c.
5		8		10.
5		9		11.
5		a		12.
5		b		13.
5		c		14.

6	y	6	son	c.
6		7		10.
6		8		11.
6		9		12.
6		a		13.
6		b		14.
6		c		15.

7	y	7	son	11.
7		8		12.
7		9		13.
7		a		14.
7		b		15.
7		c		16.

8	y	8	son	13.
8		9		14.

8	y	a	son	15.
8		b		16.
8		c		17.

9	y	9	son	15.
9		a		16.
9		b		17.
9		c		18.

a	y	a	son	17.
a		b		18.
a		c		19.

b	y	b	son	19.
b		c		1a.

c	y	c	son	1b.

DE MULTIPLICAR.

1	vez	a	es	a.
1		b		b.
1		c		c.

2	vez	5	son	a.
2		6		c.
2		7		11.
2		8		13.
2		9		15.
2		a		17.
2		b		19.
2		c		1b.

3	vez	4	son	c.
3		5		12.
3		6		15.
3		7		18.
3		8		1b.
3		9		21.
3	vez	a	son	24.
3		b		27.
3		c		2a.

4	vez	4	son	13.
4		5		17.
4		6		1b.
4		7		22.
4		8		26.
4		9		2a.
4		a		31.
4		b		35.
4		c		39.

5	vez	5	son	1c.
5		6		24.
5		7		29.
5		8		31.
5		9		36.
5	vez	a	son	3b.
5		b		43.
5		c		48.

6	vez	6	son	2a.
6		7		33.
6		8		39.
6		9		42.
6		a		48.
6		b		51.
6		c		37.

7	vez	7	son	3a.
7		8		44.
7		9		4b.
7		a		55.
7		b		5c.
7		c		66.

8	vez	8	son	4c.
8		9		57.
8		a		62.
8		b		6a.
8		c		75.

9	vez	9	son	63.
9		a		6c.
9		b		78.
9		c		84.

a	vez	a	son	79.
a		b		86.
a		c		93.

b	vez	b	son	94.
b		c		a1.

c	vez	c	son	b1

necesario que los números de unidades compuestas se espresen siempre con las palabras á que estamos acostumbrados, que son diez, ciento, mil, diez mil &c. en cuyo caso siempre es diez el número de dicha base.

Para distinguir alguna numeracion de las demas, deberá hacerse por medio de una letra, ó con el nombre del animal ó de otra cosa en que se encuentre naturalmente el número de su base, ó con el de la persona que mas haya distinguido este número. Será, pues, numeracion *sideral* la que se funda en el número de las puntas, con que por lo regular se pintan las estrellas y que tienen naturalmente las de mar; *cúbica* ó *moscardina* la del número de planos en que termina el cubo, que es el mismo de los pies de toda clase de moscas y tambien de las alas de algunas; *alfonsina* la del número que fué tan predilecto de Don Alonso el sabio; *cancerina* la del número de pies de toda clase de cangrejos; *digital* la del número de los dedos de ambas manos, y *divina* la del número predilecto de Dios, segun se vé en toda la sagrada Escritura.

Los números se espresarán de diferente modo ó mejor diré será otra la numeracion, si se varia la clasificacion de las unidades, aunque la base generativa sea siempre la misma. Si por ejemplo cada especie constase de dos unidades en lugar de tres, emitiendo la *centena*, resultaria la siguiente base espositiva[8]:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Unidad.}\\ \text{Decena.}\end{array}\right\}\ \text{Primordiales}\\[1ex] \left.\begin{array}{l}\text{Unidad.}\\ \text{Decena.}\end{array}\right\}\ \text{Millares...}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Naturales, de millones, de billones, de}\\ \text{trillones etc.}\end{array}$$

Classificacion actual.	*Classificacion propuesta.*	
Uno	1	uno
Diez	10	diez.
Ciento	1.00	mil.
Mil.	10.00	diez mil.
Diez mil.	1:00.00	un millon.
Cien mil.	10:00.00	diez millones.
Un millon.	1.0:00.00	mil millones.
Diez millones.	10.00:00.00	diez mil millones.
Cien Millones.	1:00.00:00.00	un billon.

Si se adoptase la base espositiva de los griegos en que no hay especies, sino solo cinco unidades, se espresarian los números de diferente modo desde diez mil en adelante.

[8]Table moved to page 29.—Ed.

Classificacion actual.	*Classificacion griega.*	
Uno.	1	uno.
Diez.	10	diez.
Ciento.	100	ciento.
Mil.	1000	kilia.
Diez mil.	10000	miria.
Cien mil.	1.00000	Un millon.
Un millon.	10.00000	diez millones.
Diez millones.	100.00000	cien millones.
Cien millones.	1000.00000	kilia millones.
Mil millones.	10000.00000	miria millones.
Diez mil millones.	1.00000.00000	un billon.

La mejor base espositiva es la que se ha adoptado generalmente (menos en Francia) que consta de dos especies cada una de tres grados de unidades: con cuyo motivo es la que debe suponerse en toda numeracion, mientras que no se indique otra.

Capitulo VIII

Modo de reducir los números á la numeracion que se quiera.

Para la mas fácil esplicacion de las reglas siguientes, llamaré X la numeracion segun la cual se diere escrito un número, y Z aquella segun la cual se quiere escribir.

Regla 1.ª Téngase á la vista ó muy bien sabida la tabla de sumar y la de multiplicar de X ó de Z.

Regla 2.ª Cuando las tablas de X son las que se saben, se partirá el número dado por el que forma la decena de Z escrito segun X; el cuociente de esta particion y los de las subsiguientes se partirán por el mismo número, y los residuos indicarán las cifras de Z con que se escribe el número dado, los cuales deben colocarse en órden inverso, siendo la primera de la izquierda la que se indica por el último cuociente.

Dado el número 4497 segun la numeracion digital, cuyas tablas se saben, escribirlo segun la que tiene por base generativa el siete digital.

4497	7			
29	——			
17	642	7		
3	12	—		
	5	91	7	
		21	—	
		0	13	7
			6	–
				1

Demonstracion. Supuesto que siete unidades simples de X componen la decena de Z, se sigue que el número dado consta de 642 decenas de estas (primer cuociente) y de 3 unidades simples (primer residuo): siete decenas es una centena; luego dicho número contiene 91 centenas (segundo cuociente), 5 decenas (segundo residuo) y 3 unidades: siete centenas componen la unidad millar; luego serán 13 unidades millares (tercer cuociente), ninguna centena, porque no hay residuo, 5 decenas y tres unidades simples: siete unidades millares forman una decena millar; luego el número dado, escrito segun Z, consta de 1 decena millar (último cuociente), 6 unidades millares (cuarto residuo), 0 centenas, 5 decenas y 3 unidades: 16.053 de Z es igual á 4.497 de X.

Cuando la base generativa del es mayor que la digital, se empezará por designar letras á los números que se hallan entre el nueve digital y el 10 de Z, hecho lo cual, se procederá á la reduccion.

Dado el número 176.055 de la numeracion digital, cuyas tablas se saben, escribirlo segun la que tiene por base generativa el 16 actual.

El	10	llámese	a.	El	13	llámese	d.
El	11		b.	El	14		e.
El	12		c.	El	15		f.

176.055	16			
16	——			
0055	11.003	16		
7	140	——		
	123	687	16	
	11	47	—	
		15	42	16
			10	—
				2

Colocados los residuos en órden inverso empezando por el último cuociente, y escritos los de dos cifras con las letras que tienen designadas, se hallará que el número 176.055 de la numeracion digital es igual á veinte y a-mil efecientos be-dieces y siete unidades simples (2a.fb7) de Z.

Regla 5.ª Cuando las tablas que se saben no son las de X sino las de Z, se harán por medio de estas las siguientes operaciones.

El número de la decena de X escrito segun Z será la raiz de un órden de tantas potencias, menos una, cuantas son las cifras del número que se ha de reducir. Las decenas de este número se multiplicarán por la primera potencia, las centenas por la segunda, las unidades millares por la tercera, las decenas millares por la cuarta &c. Súmense luego los valores segun Z de las cifras del número dado, y resultará escrito como se deseaba.

Sea Z la numeracion digital, cuyas tablas se saben, y segun la cual se quiere escribir el número 2a.fb7 de X, cuya base generativa es el 16 digital.

Snpuesto que son cinco las cifras del número dado, se buscarán las cuatro potencias de 16.

1.ª 16.   2.ª 256.   3.ª 4.096.   4.ª 65.536

Valor de cada cifra del número dado.

Las unidades simples son	7.
b decenas, que son 11, cada una igual al número 16	176.
f centenas, que son 15, cada una igual á 256	3.840.
a millares, que son 10, cada una igual á 4.096	40.960.
2 decenas millares, cada una igual á 65.536	131.072.
El número 2a.fb7 de X es igual á.	176.055. de Z.

Número dado	36.rt5.
Doble de la 1.ª cifra	6.
1.ª suma y 3.ª cifra	42r.
Doble de la 1.ª suma	84.
2.ª suma y 4.ª cifra	5.15t.

Doble de la 2.ª suma . . . . 1.030.	
3.ª suma y 5.ª cifra	61.905.
Doble de la 3.ª suma	12.380.
35.rt5 de X es igual á	74.285. digital.

Demonstracion. La decena de X tiene dos unidades que la de Z; el número 36 consta de tres decenas y 6 unidades: luego el 36 de X consta de tres veces dos unidades mas que el 36 de Z, y por consiguiente es igual á 42 de Z. Este número 42 es de decenas de X respecto de las unidades de la cifra r luego el cuatrocientos veinte y r de X tiene dos veces 42 unidades mas, que el cuatrocientos veinte y once de Z; luego aquel es igual á 515 de Z. Este número 515 es de decenas de X respecto de las unidades de la cifra t &c.

Regla 6.ª Cuando la diferencia de la base de Z á la de X es tres, se triplicarán los aumentos: si fueren cuatro, se cuadruplicarán &c.

Regla 7.ª Cuando la base de X es menor que la de Z y la diferencia es 1; el valor de la primera cifra se restará del número compuesto de la primera y la segunda; á cada residuo se bajará la cifra que sigue del número dado, y de lo que resulte se restará el valor del último residuo. Esta operacion debe hacerse por medio de la tabla de sumar de Z.

Dado el número 38.572 de la numeracion cuya base generativa es el 9 de la digital, reducirlo á esta.

Número dado	38.572.
1.ª cifra	3.
1.º residuo y 3.ª cifra	355.
1.º residuo	35.
2.º residuo y 4.ª cifra	3.207.
2.º residuo	320.
3.º residuo y 5.ª cifra	28.872.
3.º residuo	2.887.
38.572 de X es igual á	25.985. digital.

Demonstracion. Si cada decena de X tiene una unidad menos que la de Z, se sigue que 38 de X tiene tres unidades menos que 38 de Z: luego es igual á 35 de Z. El n.º 355 de X tiene por la misma razon 35 unidades menos que el 355 de Z: luego aquel es igual á 320 de Z &c.

Regla 8.ª Si la diferencia de la base generativa de X á la de Z fuere 2, se duplicarán los números que se han de restar: si fuere 3, se triplicarán &c.

Cuando ni X ni Z es la numeracion digital, se dispondrán las tablas de sumar y multiplicar de la que tenga menor base generativa, y con ellas á la vista podrá hacerse la reduccion, aunque seria conveniente ensayarse ántes, haciendo algunas otras operaciones aritméticas. De aquí se sigue que mientras no se tengan bien sabidas y ensayadas las tablas de X ó de Z, será lo mas breve reducir el número dado á la numeracion digital primero y despues á la que se desea.

Ya se habra entendido que aunque sean diferentes en cada numeracion los signos verbales ó escritos con que se espresa algun número, no por eso deja de ser siempre el mismo, ni de tener las mismas propiedades. El doce de la numeracion digital se llama quince segun la alfonsina, sin dejar de ser número *par*, ni de dividirse por 3, por 4 y por 6.

Capitulo IX

De la numeracion que debe preferirse.

El traductor español de la aritmética de Lacroix ha propuesto en una nota estas dos cuestiones. Primera: *¿Reune nuestro sistema numérico* (nuestra numeracion escrita) *ventajas que no es posible encontrar en ningun otro, y por eso se le ha dado la preferencia sobre todos los demas?* Segunda: *¿Que alteracion padecerian las reglas de la aritmética, si se eligiese otro número de cifras, y por consiguiente otra escala de numeracion* (otra numeracion verbal)?

En estas dos cuestiones se prescinde de la clasificacion de las unidades, y lo que se trata de averiguar es, primero, si la base generativa de todas las numeraciones que se han practicado hasta hoy, se ha preferido por ser la mas ventajosa; y segundo, si teniendo la numeracion otra base generativa, serán otras las reglas de la aritmética.

No puede negarse que cuando no sabemos ó no podemos espresar los números de palabra ni por escrito, nos valemos de los dedos de ambas manos, con cuyo motivo es el número de estos dedos la base generativa de todas las numeraciones que se han practicado hasta ahora así en las tribus salvajes como en las naciones mas cultas: luego esta base no ha sido elegida ó preferida, parque esto supondria concurrencia de otras, sino la que los hombres *en su ignorancia* han encontrado y encuentran mas á mano. Sin tener ninguna idea de sistema ni de artificio numérico, disponen con ella la única numeracion verbal que conocen, y no pueden luego imaginar ninguna otra; esta es la causa de que hasta ahora no haya sido posible examinar cual es la numeracion mas ventajosa, con lo cual queda resuelta la primera cuestion. En cuanto á la segunda, ya se ha visto que siendo diferente la base generativa, se espresan los números de otro modo, y son otras las tablas de sumar y multiplicar; pero que el artificio de la numeracion y las reglas de la aritmética no varian en cuanto á su forma y método.

Habiendo ya hoy descubierto el modo de disponer la numeracion verbal con la base generativa que se quiera, podemos examinar muy fácilmente cual es la mas ventajosa, sin temor de equivocarnos.

Cuanto mayor sea la base generativa, se escribirán los números con menos cifras, ó será menor la primera de la izquierda: el que en la numeracion digital es 1.048, viene á ser 418 en la que se llame *diez* el 16 digital; 871 de aquella es 367 de esta.

Es una ventaja, sin duda, poder escribir los números mayores con menos cifras; pero tenemos que renunciarla, cuando la base pasa de cierto término, porque son muchas en este caso las cifras que se han de aprender, y muy largas y complicadas las tablas de sumar y multiplicar, y por consiguiente muy dificil la aritmética. En la numeracion digital constan ó deben constar las tablas de nueve cuadros, cada uno de nueve proposiciones; y si atendemos al trabajo que tienen los niños para aprenderlas, se sigue que emplearian mucho tiempo en las que constasen de seis cuadros mas y de seis proposiciones mas en cada cuadro; bien puede asegurarse, que muchos niños no las aprenderian nunca: luego debe desecharse toda numeracion, cuyo número *diez* sea mayor que el quince digital.

Cuanto menor sea la base generativa, menos palabras numéricas y menos cifras habrá que aprender, y serán tambien mas cortas y menos complicadas las tablas; pero tambien tenemos que renunciar á estas ventajas, cuando el número de la base es demasiado pequeño, porque se han de emplear muchas mas cifras para escribir un número: el 8 digital es 1.000 de Leibnitz; el 64 es 1:000.000. De aquí se sigue, que las operaciones aritméticas son mas largas; cuando lo que importa, es hacerlas con el mayor ahorro posible de tiempo y cifras: luego debe desecharse toda numeracion, cuyo número diez sea menor que el nueve digital.

De las observaciones precedentes resulta, que debemos hallar la base de la numeracion mas ventajosa entre los números 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 digitales.

Todas las potencias son números pares ó impares, segun lo que sea la primera: luego siendo impar el que se llame diez, lo serán tambien sus potencias 100, 1.000, 10.000 &c. y los demas números redondos, cuyas cifras positivas sean impares, como 30, 50, 70, 900, 5.000. Esta es la causa de que en semejantes numeraciones no es fácil conocer por la última cifra, si un número es par ó impar. En la escala de la página 26 se ha visto, que siendo diez el nueve digital, son impares los números 12, 14, 16 y 18, sin embargo de que son pares las cifras con que terminan. Esto no sucede nunca, siendo par elnúmero de la base: luego debemos desechar toda numeracion en que sea impar.

Si de aquellos siete números, entre los cuales se halla el que buscamos, quitamos el 9, el 11, el 13 y el 15 porque son impares, solo nos quedan el 10, el 12, y el 14.

Para la eleccion de uno de estos tres debe tenerse presente, que los números mas importantes, porque facilitan muchos cálculos, son los que se dividen por 2 y por 3; y que los mas hábiles aritméticos huyen de los primos, que son los que ofrecen mas dificultades.

De tres partes alicuotas que tiene el número diez, que son 1, 2 y 5, hay dos que no se dividen por 2 ni por 3, y lo mismo sucede con las del catorce que son 1, 2 y 7.

Debe, pues, preferirse el *doce*, porque sus partes alicuotas son los cuatro primeros números de la escala 1, 2, 3, 4, y el 6; este último es de los mas importantes, y de los otros solo el primero no se divide por 2 ni por 3.

Debe preferirse el *doce*, porque cada una de sus partes alicuotas tiene propiedades útiles y curiosas, de que han hablado muchos sabios; solo probaré que son fundamentales de las matemáticas. El *uno* siempre se ha considerado principio y raiz de los números, porque es parte alicuota de todos. El *dos* es fundamento de la aritmética, porque este arte se reduce principalmente á *dos* cosas, componer y descomponer los números; la composicion puede ser de *dos* maneras, sumando ó multiplicando, y la descomposicion tambien de *dos* maneras, restando ó dividiendo. Por muy sencillos que sean los números dados, no se pueden sumar á un tiempo, sino *dos* solamente; por ejemplo, para sumar 1, 2 y 4, es necesario que primero se diga, uno y dos son tres, y despues tres y cuatro son siete; para multiplícar no pueden ser mas que *dos* los números dados, que son los factores; *dos* para restar, el minuendo y el sustraendo, y *dos* para partir, el dividendo y el dividor. Los términos de comparacion no pueden ser mas que *dos*, y *dos* tambien sus relaciones, que son la diferencia entre ellos, ó el cuociente que espresa las yeces que el mayor contiene al menor. Sin el triángulo, que es una figura de *tres* lados y *tres* ángulos, no se puede calcular la medida de las líneas. Sin el cuadrado, que es una figura de *cuatro* lados y *cuatro* ángulos rectos, no se pueden medir las superficies. Sin el cubo, que es un sólido terminado por *seis* planos, no se pueden medir los sólidos.

Debe preferirse el *doce*, porque no puede haber cuatro ó mas números seguidos entre las partes alicuotas de ninguno, que no sea multíplice de doce; este y sus compuestos son los únicos que se pueden dividir por tres y por cuatro, y es preciso que en cuatro números seguidos haya un ternario y un tetráctico. Los números seguidos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son partes alicuotas de 60.

Debe preferirse el *doce*, porque sus partes alicuotas suman 16 que es un tercio mayor: de aquí se sigue que los multíplices de 12 entran por lo menos una vez y mas de un tercio de otra en la suma de sus respectivas partes alicuotas. Las de 24 componen 36 que es la mitad mayor; las de 36 suman 55 que es mas de la mitad mayor. La suma de las de 60 es 108 &c. Si el número 72 se multiplica por 5, 7, 11 y otros primos, se hallarán los que pueden entrar dos, tres ó mas veces en la suma de sus partes alicuotas. El producto de 72 por 5, que es 360, entra dos veces y un cuarto de otra en la suma de sus 23 partes alicuotas que es 810.

Debe preferirse el *doce*, porque es el número predilecto de todos los hombres desde que tienen algunos grados de civilizacion: parece que todos á una voz claman porque sea el *doce* la base generativa de las unidades compuestas: no se habla de la decena, sino para esplicar el arte de numerar; mientras que la palabra *docena* se oye continuamente. En el comercio casi todo se trata por docenas ó *gruesas*, que son docenas de docenas; muchas medidas se dividen y subdividen en otras doce; á los diámetros del sol y de la luna han dado los astrónomos doce dígitos y al zodiaco doce signos; en el dia natural se cuentan dos veces doce horas, y en un año doce meses; los matemáticos dividen la circunferencia del círculo en 360 grados y cada grado, cada minuto, cada segundo, cada tercero &c. se subdivide en 60, porque estos números son multíplices de 12; los arquitectos dividen el modulo en doce ó docena y media de partes &c.

En Francia se prefirió el número diez para el arreglo de nuevos pesos y medidas, componiéndolos y subdividiéndolos de diez en diez. Los sabios han estimado esta invencion, y seria utilísimo que se estableciese en todas las naciones, no solo por la multitud de reducciones que nos ahorraríamos, sino tambien porque ninguna otra especie de quebradas ofrece tanta facilidad para las operaciones aritméticas como los decimales. Reúnanse, pues, en unos mismos números las propiedades del doce y las decimales. Esta pretension hubiera parecido ayer el mayor de los absurdos; pero ya hoy sabemos que las propiedades decimales no consisten en el número que ahora se llama diez, sino en que es la base generativa de las unidades compuestas: descubierto ya el modo de formar esta base con el número que se quiera, debe preferirse el doce.

Por cualquiera de las razones que preceden, es de adoptarse la numeracion en que se llame diez el número que ahora es doce; pero hay una sola que las comprende á todas, ó mejor dicho es el orígen ó fundamento de cuantas pueda haber, y es la siguiente: *el número doce es el predilecto de Dios.* Doce fuéron las tribus del pueblo escogido; doce los profetas mayores; doce los apóstoles; ha querido que se pueda variar por doce modos mayores ó doce menores la música con que se deben acompañar sus alabanzas, y ha dispuesto, que sea el doce la base del sistema de las propiedades esenciales de los números, cuyas combinaciones son admirables, y quizá nunca llegarán á conocer los hombres toda su importancia.

Los matemáticos modernos están de acuerdo con Buffon y otros sabios en que jamas debe variarse la numeracion actual, aun cuando fuera facil variar el lenguaje; porque segun ella están escritos los números de la historia sagrada y profana; de las tablas y cálculos científicos, de los instrumentos graduados fisicos y matemáticos, &c. &c. y por consiguiente cualesquiera que fuesen las ventajas de una nueva numeracion verbal y escrita, nunca llegarian á compensar el inmenso trastorno, y aun los perjuicios que pudiera causar su establecimiento. Este argumento tan poderoso en sí mismo y tan respetable por las personas que lo han producido, es contrario á mi intento, y sin embargo convengo en que debe seguirse y sostenerse una resolucion que descansa sobre fundamentos tan sólidos. Las raices que ya tiene la numeracion digital son muy profundas, porque su antigüedad se halla en la existencia del primer hombre, y desde entónces hasta hoy es la única que ha practicado. No debe pues adoptarse ninguna otra, cualesquiera que sean sus ventajas, mientras que no nos veamos obligados por una fuerza irresistible.

Capitulo X

Sistema de las propiedades esenciales de los números esplicado por medio de la numeracion digital.

Si se llama sistema numérico cualquier órden de potencias, pueden ser tantos como se quiera; mas no deben confundirse con el sistema numérico natural, el cual es único y no es obra de los hombres, sino que existe en el hecho de existir los números,.porque está en su esencia ó natural composicion, en sus propiedades esenciales.

Estas propiedades son cuatro: la primera es no dividirse por 2 ni por 3, aunque se dívidan por cualquier otro: los que tienen esta propiedad son los que llamo *primos*; de modo que no tengo por tales al 2 ni al 3. Son primos simples los que no se dividen por 2, ni por 3 ni por ningun otro número, sino solo por si mismos, como el 5, el 7, el 23; y primos compuestos los que no se dividen por 2 ni por 3, pero sí por algun otro, que no puede ser sino primo tambien, como el 49 que se divide por 7; el 35 por 7 y por 5.

La segunda propiedad esencial es la de dividirse por 2: estos números se llaman *binarios*, y todos son compuestos, menos el 2 que es simple.

La tercera es la de dividirse por 3; los números que tienen esta propiedad, se llaman *ternarios*, y todos son compuestos, menos el 3.

La cuarta, es la de dividirse por 4; y estos números son los *tetráctícos* ó binarios dobles.

Llamo *puros* ó *esclusivos*, los que tienen una sola propiedad esencial, como el 10 que es binario y notternario ni tetráctico, el 16 que es tetráctico y no ternario &c., y llamo números *mistos* los que tienen dos propiedades esenciales, como el 6 que es binario y ternario, y el 12 que es ternario y tetráctico &c.

Atendiendo á dichas cuatro propiedades naturales, solo hay seis clases de números.

A la primera pertenecen los *primos*, sean simples ó compuestos, como 1, 7, 25, 35.

A la segunda los *binarios puros* ó *esclusivos*, siendo estos los que se dividen por 2 y no por 3 ni por 4, como 10, 14, 22.

A la tercera los *ternarios puros*, que se dividen por 3 y no por 2, como 9, 15, 21.

A la cuarta los *tetrácticos puros* que se dividen por 4 y no por 3, como 8, 16, 20.

A la quinta los que se dividen por 2 y por 3, pero no por 4, á los cuales llamo *biternarios*, como 6, 18, 30.

Y á la sesta los que se dividen por 3 y por 4, que llamo por esta razon *traternarios*, y no son mas que el 12 y sus compuestos, como 24, 36, 48.

Números análogos llamo los que tienen una misma propiedad esencial, aunque pertenezcan á distintas clases: el 6, el 9 y el 12 son análogos, porque son ternarios, aunque cada uno es de clase diferente.

Números semejantes llamo los que son de una misma clase, como el 2, el 10 y el 14 que son binarios puros; de modo que los semejantes son siempre análagos, aunque no todos los análogos son semejantes.

Recíprocos son dos números semejantes que suman doce ó un multíplice de doce, como el 4 y el 8, el 3 y el 9, el 10 y el 14.

Consonantes llamo los números que tienen una misma cifra final, como 1, 21, 101, 9, 19, 569.

Bien distinguidas las seis clases de números que hemos encontrado, atendiendo á su esencia ó natural composicion, es decir, al modo con que se componen de los cuatro primeros de la escala, examínese desde el principio de esta á que clase pertenece cada número, y se encontrarán de todas seis sin pasar del doce en esta forma: cuatro primos, dos binarios puros, dos ternarios puros, dos tetrácticos puros, un biternario y un traternario. Continúese este exámen, y se verá que del mismo modo que estan colocados los de cada clase desde nada hasta doce, se hallan tambien desde doce hasta veinte y cuatro; desde veinte y cuatro hasta treinta y seis, y así de doce en doce hasta el infinito.

TABLA DEMOSTRATIVA DEL SISTEMA NATURAL DE LOS NÚMEROS.

Traternarios.	0.	12.	24.	36.	48.
Primos estremos.	1.	13.	25.	37.	49.
Binarios puros.	2.	14.	26.	38.	50.
Ternarios puros.	3.	13.	27.	39.	51.
Tetrácticos puros.	4.	16.	28.	40.	52.
Primos medios.	5.	17.	29.	41.	53.
Biternarios.	6.	18.	30.	42.	54.
Primos medios.	7.	19.	31.	43.	55.
Tetrácticos puros.	8.	20.	32.	44.	56.
Ternarios puros.	9.	21.	33.	45.	57.
Binarios puros.	10.	22.	34.	46.	58.
Primos estremos.	11.	23.	35.	47.	59.
Traternarios.	12.	24.	36.	48.	60.

OBSERVACIONES SOBRE LA TABLA Y FIGURA QUE PRECEDEN.[9]

1.ª Los números traternarios se hallan á los estremos de cada porcion ó período en que se repiten las mismas propiedades esenciales, en el mismo órden y con igual combinacion ó armonía; de suerte que en el mismo traternario que concluye un período, empieza el que le sigue.

2.ª Todo biternario ocupa el medio y es como un centro de su respectivo período, y los traternarios se hallan á los estremos; luego los números *mistos* son los cardinales de todo el plan de este sistema natural.

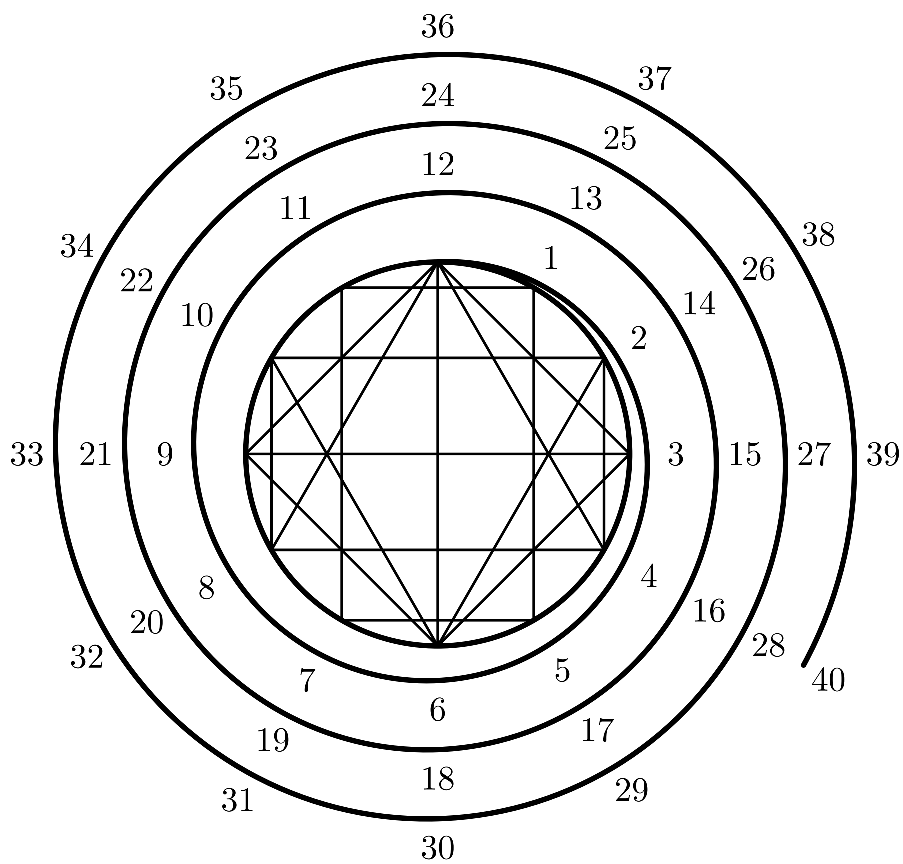
3.ª Cualesquiera dos númenos que se hallen á iguales distancias de un mismo traternario ó biternario, son semejantes, y suman doce ó un multíplice de doce, doble del que forma un medio entre los dos.

Los que distan igualmente del 6 suman 12, como los primos estremos 1 y 11; los binarios puros 2 y 10; los ternarios puros 3 y 9; los tetrácticos puros 4 y 8 y los primos medios 5 y 7.

[9] Figura trasladó a la página 39.—Ed.

FIGURA

QUE REPRESENTA EL SISTEMA NATURAL DE LOS NÚMEROS POR MEDIO DE LA NUMERACION DIGITAL



Los que distan igualmente del 12 suman 24, como los primos estremos 11 y 13; los binarios puros 10 y 14; los ternarios puros 9 y 15 &c.

De esta observacion se sigue que son precisamente semejantes las dos partes desiguales, cualesquiera que sean, en que se divida el número 12 ó un multíplice de 12.

4.ª Dos números semejantes que se hallan en un mismo período suman 12 ó un multíplice de 12; pero esta regla general no se verifica entre un primo estremo y un primo medio, como 1 y 5 que son 6; sino entre dos medios como 5 y 7, y entre dos estremos como 1 y 11; por lo cual y por su diferente colocacion, parece que no deben considerarse semejantes los cuatro primos: luego las diferentes clases de números no son seis como he dicho ántes, sino siete y en este órden: 1.ª la de primos estremos; 2.ª la de binarios puros; 3.ª la de ternarios puros; 4.ª la de tetrácticos puros; 5.ª la de primos medios; 6.ª la de biternarios, y 7.ª la de traternarios.

5.ª Los números de las clases 1.ª , 2.ª , 3.ª , 4.ª , 5.ª son todos puros, porque solo tienen una propiedad esencial, y los de la 6.ª y 7.ª son únicamente los mistos.

6.ª En cada doce números seguidos, cualesquiera que sean, hay *dos* de cada clase de los puros ó de una sola propiedad, y uno de cada clase de los mistos ó de dos propiedades.

7.ª Los cinco números que en cada período preceden al *biternario*, son uno de cada clase de los puros: lo mismo sucede con los cinco que le siguen; pero aquellos y estos se hallan reciprocamente en órden inverso en cuanto á sus clases, las cuales proceden de los estremos hácia el medio; de modo que se hallan en el órden de la escala en los cinco *anteriores*, como 1, 2, 3, 4 y 5; 13, 14, 15, 16 y 17, y en órden inverso en los cinco *posteriores*, como 11, 10, 9, 8 y 7; 23, 22, 21, 20 y 19.

8.ª En cinco números puros seguidos, sean anteriores ó posteriores, hay dos primos que son el primero y el último; dos binarios el segundo y el penúltimo, y un ternario que se halla en medio de los cinco; mas no son semejantes los dos primos, porque el uno es estremo y el otro medio; ni los dos binarios, porque el uno es sencillo y el otro doble ó sea tetráctico.

9.ª Los números binarios que no son dobles, se hallan naturalmente colocados á iguales distancias, y en el circulo de un período forman un triángulo equilátero 2, 6, 10, como se vé en la figura; porque siendo sus intervalos de tres números, no puede haber mas que tres de estos binarios en cada período, como 14, 18, 22; 26, 30, 34.

10.ª Los tetrácticos se hallan tambien á iguales distancias, y forman en el circulo un triángulo equilátero 4, 8, 12, por las mismas razones de la observacion anterior.

11.ª En cada doce números seguidos hay cuatro primos, cuatro binarios que no son ternarios y cuatro ternarios.

12.ª Los cuatro primos forman en el círculo un cuadrilongo 1, 5, 7, 11, porque no están á iguales distancias, sino inmediatos á los ternarios dobles, dos hácia los estremos del periodo y dos hácia el medio.

13.ª Los cuatro binarios que no son ternarios forman tambien en el círculo un cuadrilongo 2, 4, 8, 10, que hace cruz con el de los primos. Estos binarios se hallan inmediatos á los ternarios sencillos ó puros.

14.ª Los cuatro números ternarios se hallan á iguales distancias con intervalos de dos números, y forman en el círculo del período el cuadrado 3, 6, 9, 12.

15.ª Los números pares son los binarios puros, los biternarios y los traternarios, y los impares solo son los primos medios y estremos y los ternarios puros.

Este admirable sistema natural es la prueba mas grande que pudiera presentarse de las siguientes palabras del abate La-Mennais. „El órden en su nocion mas amplia es el conjunto de las relaciones que se derivan de la naturaleza de los seres, y estas relaciones son verdades reales, pues que existen independientes del espíritu que las considera... Las leyes de la naturaleza se hacen ellas mismas conocer facilmente por su antigüedad, por ser universales, por un cierto carácter de simplicidad, fuerza y grandeza que las distingue esencialmente, y las conserva indestructibles en medio de las revoluciones de las costumbres y de las vicisitudes de las opiniones."

Facilmente se habrá entendido en el capítulo VII, que aunque un número se esprese de diferente modo en cada numeracion, no por eso deja de ser siempre el mismo, ni de tener las mismas propiedades esenciales: luego el sistema de estas propiedades no varia nunca; y por consiguiente la numeracion que se conoce y practica, es la mas propia para darlo á conocer. Sin embargo, no es posible descubrir todo su mérito ni utilizarlo, sino por medio de la numeracion que llamo natural, porque es la que se conforma con dicho sistema natural, siendo diez el número que ahora es doce.

Capitulo XI

Numeración natural.

Supuesto que la palabra *once* significa diez y uno, *doce*, diez y dos &c., se sigue que llamando diez el número que ahora es doce, viene á ser *once* el que ahora es *trece*, *doce* el que ahora es *catorce*; *trece* el que ahora es *quince* &c., de modo que los dos números que hay entre el nueve y el nuevo diez, que son los que llamamos ahora *diez* y *once*, quedan sin nombres. No hallando por el pronto otros nuevos con que espresarlos á mi satisfaccion, y mu y deseoso de disponer la numeracion natural, llamé *biscinco* el número que se compone de dos veces cinco y *seiscinco* el que ahora es *once*. Mas como estas dos palabras son compuestas, y de ellas tenia que derivar y componer otras, las reduje á *bice* y *sixe*. Para el número *bice* elegí la cifra del dos inversa, y asimismo la del cuatro para el *sixe*, de suerte que los números de la base natural espresados de palabra y por escrito son los siguientes:

1	uno.	5	cinco.	9	nueve.
2	dos.	6	seis.	↊	bice.
3	tres.	7	siete.	↋	sixe.
4	cuatro.	8	ocho.	10	diez.

Para continuar la escala despues del diez se dirá once, doce, trece… diez y nueve, diez y bice, diez y sixe, veinte (24 digital), veinte y uno, veinte y dos… veinte y nueve, veinte y bice, veinte y sixe, treinta (36 digital): y siguiendo este órden al llegar á noventa y nueve se continuará diciendo noventa y bice, noventa y sixe, bicenta (120 digital) bicenta y uno, bicenta y dos… bicenta y nueve, bicenta y bice, bicenta y sixe, sixenta (132 digital), sixenta y uno, sixenta y dos… sixenta y nueve, sixenta y bice, sixenta y sixe, ciento (144 digital, cuadrado de 12).

TABLA

DE LOS NÚMEROS DE LA BASE Y REDONDOS DE LA NUMERACION NATURAL Y SU CORRESPONDENCIA CON LA DIGITAL

Numeracion natural.		*Numeracion digital.*
1	igual á	1.
2	=	2.
3	=	3.
4	=	4.
5	=	5.
6	=	6.

7	=	7.
8	=	8.
9	=	9.
↊	=	10.
↋	=	11.
10	=	12.
20	=	24.
30	=	36.
40	=	48.
50	=	60.
60	=	72.
70	=	84.
80	=	96.
90	=	108.
↊0	=	120.
↋0	=	132.
100	=	144.
200	=	288.
300	=	432.
400	=	576.
500	=	720.
600	=	864.
700	=	1.008.
800	=	1.152.
900	=	1.296.
↊00	=	1.440.
↋00	=	1.584.
1.000	=	1.728.
2.000	=	3.456.
3.000	=	5.184.
4.000	=	6.912.
5.000	=	8.640.
6.000	=	10.368.
7.000	=	12.096.
8.000	=	13.824.
9.000	=	15.552.
↊.000	=	17.280.
↋.000	=	19.008.
10.000	=	20.736.
20.000	=	41.472.
30.000	=	62.208.
40.000	=	82.944.
50.000	=	103.680.

60.000	=	124.416.
70.000	=	145.152.
80.000	=	165.888.
90.000	=	186.624.
$\rotatebox[origin=c]{180}{2}$0.000	=	207.360.
$\rotatebox[origin=c]{180}{4}$0.000	=	228.096.
100.000	=	248.832.
200.000	=	497.664.
300.000	=	746.496.
400.000	=	995.328.
500.000	=	1:244.160.
600.000	=	1:492.992.
700.000	=	1:741.824.
800.000	=	1:990.656.
900.000	=	2:239.488.
$\rotatebox[origin=c]{180}{2}$00.000	=	2:488.320.
$\rotatebox[origin=c]{180}{4}$00.000	=	2:737.152.
1:000.000	=	2:985.984.
2:000.000	=	5:971.968
3:000.000	=	8:957.952.
4:000.000	=	11:943.956.
5:000.000	=	14:929:920.
6:000.000	=	17:915.904.
7:000.000	=	20:901.888.
8:000.000	=	23.887.872.
9:000.000	=	26:873.856.
$\rotatebox[origin=c]{180}{2}$:000.000	=	29:859.840.
$\rotatebox[origin=c]{180}{4}$:000.000	=	32:845.824.
10:000.000	=	35:831.808.

TABLA

DE LOS NÚMEROS DE LA BASE Y REDONDOS DE LA NUMERACION DIGITAL Y SU CORRESPONDENCIA CON LA NATURAL

Numeracion digital.		*Numeracion natural.*
1	igual á	1.
2	=	2.
3	=	3.

4	=	4.
5	=	5.
6	=	6.
7	=	7.
8	=	8.
9	=	9.
10	=	↊.
20	=	18.
30	=	26.
40	=	34.
50	=	42.
60	=	50.
70	=	55.
80	=	68.
90	=	76.
100	=	84.
200	=	148.
300	=	210.
400	=	294.
500	=	358.
600	=	420.
700	=	4↊4.
800	=	568.
900	=	630.
1.000	=	6↋4.
2.000	=	1.1↊8.
3.000	=	1.8↊0.
4.000	=	2.394.
5.000	=	2.↊88.
6.000	=	3.580.
7.000	=	4.074.
8.000	=	4.768.
9.000	=	5.260.
10.000	=	5.954.
20.000	=	↋.6↊8.
30.000	=	15.440.
40.000	=	1↋.194.
50.000	=	24.↋28.
60.000	=	2↊.880.
70.000	=	34.614.
80.000	=	3↊.368.
90.000	=	44.100.
100.000	=	49.↊54.

200.000	=	97.8↊8.
300.000	=	125.740.
400.000	=	173.594.
500.000	=	201.428.
600.000	=	24↋.280.
700.000	=	299.114.
800.000	=	326.↋68.
900.000	=	374.↊00.
1:000.000	=	402.854.
2:000.000	=	805.4↊8.
3:000.000	=	1:008.140.
4:000.000	=	1.40↊.994.
5:000.000	=	1:811.628.
6:000.000	=	2:014.280.
7:000.000	=	2:416.↋14.
8:000.000	=	2:819.768.
9:000.000	=	3:020.400.
10:000.000	=	3:423.054.

TABLAS DE LA NUMERACION NATURAL

DE SUMAR.

1	y	1	son	2.
1		2		3.
1		3		4.
1		4		5.
1		5		6.
1		6		7.
1		7		8.
1		8		9.
1		9		↊.
1		↊		↋.
1		↋		10.

2	y	1	son	3.
2		2		4.
2		3		5.
2		4		6.
2		5		7.
2		6		8.
3	y	↊		11.
3		↋		12.

4	y	1	son	5.
4		2		6.
4		3		7.
4		4		8.
4		5		9.
4		6		↊.
4		7		↋.
4		8		10.
4		9		11.
4		↊		12.
4		↋		13.

5	y	1	son	6.
5		2		7.
5		3		8.
6	y	7		11
6		8		12.
6		9		13.
6		↊		14.
6		↋		15.

7	y	1	son	8
7		2		9
7		3		↊
7		4		↋
7		5		10.
7		6		11.
7		7		12.
7		8		13.
7		9		14.
7		↊		15.
7		↋		16.

9	y	4		11.
9		5		12.
9		6		13.
9		7		14.
9		8		15.
9		9		16.
9		↊		17.
9		↋		18.

↊	y	1	son	↋.
↊		2		10.
↊		3		11.
↊		4		12.
↊		5		13.
↊		6		14.
↊		7		15.
↊		8		16.
↊		9		17.

2		7		9.
2		8		↊.
2		9		↋.
2		↊		10.
2		↋		11.

3	y	1	son	4.
3		2		5.
3		3		6.
3		4		7.
3		5		8.
3		6		9.
3		7		↊.
3		8		↋.
3		9		10.

5		4		9.
5		5		↊.
5		6		↋.
5		7		10.
5		8		11.
5		9		12.
5		↊		13.
5		↋		14.

6	y	1	son	7
6		2		8
6		3		9
6		4		↊
6		5		↋
6		6		10

8	y	1	son	9
8		2		↊
8		3		↋
8		4		10
8		5		11.
8		6		12.
8		7		13.
8		8		14.
8		9		15.
8		↊		16.
8		↋		17.

9	y	1	son	↊.
9		2		↋.
9		3		10.

↊		↊		18.
↊		↋		19.

↋	y	1	son	10.
↋		2		11.
↋		3		12.
↋		4		13.
↋		5		14.
↋		6		15.
↋		7		16.
↋		8		17.
↋		9		18.
↋		↊		19.
↋		↋		1↊.

DE MULTIPLICAR.

1	vez	0	es	0.
1		1		1.
1		2		2.
1		3		3.
1		4		4.
1		5		5.
1		6		6.
1		7		7.
1		8		8.
1		9		9.
1		↊		↊.
1		↋		↋.

2	v.s	0	son	0.
2		1		2.
2		2		4.
2		3		6.
2		4		8.
2		5		↊.
2		6		10.
2		7		12.
2		8		14.
2		9		16.

3		↊		26.
3		↋		29.

4	v.s	0	son	0.
4		1		4.
4		2		8.
4		3		10.
4		4		14.
4		5		18.
4		6		20.
4		7		24.
4		8		28.
4		9		30.
4		↊		34.
4		↋		38.

5	v.s	0	son	0.
5		1		5.
5		2		↊.
5		3		13.
5		4		18.
5		5		21.
5		6		26.

6		7		36
6		8		40
6		9		46
6		↊		50
6		↋		56

7	v.s	0	son	0.
7		1		7.
7		2		12.
7		3		19.
7		4		24.
7		5		2↋.
7		6		36.
7		7		41.
7		8		48.
7		9		53.
7		↊		5↊.
7		↋		65.

8	v.s	0	son	0.
8		1		8.
8		2		14.
8		3		20.

9	v.s	4		30.
9		5		39.
9		6		46.
9		7		53.
9		8		60.
9		9		69.
9		↊		76.
9		↋		83.

↊	v.s	0	son	0.
↊		1		↊.
↊		2		18.
↊		3		26.
↊		4		34.
↊		5		42.
↊		6		50.
↊		7		5↊.
↊		8		68.
↊		9		76.
↊		↊		84.
↊		↋		92.

↋	v.s	0	son	0.

2	↊	18.	5	7	2ᔭ.	8	4	28.	ᔭ	1	ᔭ.
2	ᔭ	1↊.	5	8	34.	8	5	34.	ᔭ	2	1↊.
			5	9	39.	8	6	40.	ᔭ	3	29.
3	v.^{s} 0	son 0.	5	↊	42.	8	7	48.	ᔭ	4	38.
3	1	3.	5	ᔭ	47.	8	8	54.	ᔭ	5	47.
3	2	6.				8	9	60.	ᔭ	6	56.
3	3	9.	6	v.^{s} 0	son 0.	8	↊	68.	ᔭ	7	65.
3	4	10.	6	1	6.	8	ᔭ	74.	ᔭ	8	74.
3	5	13.	6	2	10.				ᔭ	9	83.
3	6	16.	6	3	16.	9	v.^{s} 0	son 0.	ᔭ	↊	92.
3	7	19.	6	4	20.	9	1	9.	ᔭ	ᔭ	↊1.
3	8	20.	6	5	26.	9	2	16.			
3	9	23.	6	6	30.	9	3	23.			

NOTA. He empezado cada cuadro de esta tabla multiplicando por cero, á fin de que se vea mejor su admirable armonía, que esplicaré mas adelante.

Las reducciones de números propuestas en el capítulo VIII se han hecho por medio de las tablas de sumar y multiplicar de la numeracion digital, con cuyo motivo no estará demas hacer aqui algunas por medio de las tablas de la natural.

Dado el número 7.67↊ᔭ natural, reducirlo á la numeracion digital, cuyo diez corresponde al ↊ natural.

7.6↊ᔭ	↊			
↊0	——			
ᔭ0	911	↊		
ᔭ	91	—		
1	9	↊↊	↊	
		00	—	
			11	↊
			3	–
				1

El último cuociente y los residuos colocados en órden inverso forman el número 13.091 digital, que es el 7.6↊ᔭ natural.

Por el contrario: sea el número dado 13.094 digital el que se quiere reducir á la numeracion natural. Supuesto que la base de este es mayor que la de aquella y que es 2 la diferencia, se procederá del modo siguiente.

Número dado	13.091.
Doble de la 1.ª cifra .	2.
1.r residuo y 3.ª cifra	110.
Doble del 1.r residuo	22.
2.º residuo y 4.ª cifra	↊↊9.
Doble del 2.º residuo	198.
5.r residuo 5.ª cifra . .	9.111.
Doble del 3.r residuo	1.622.
	7.6↊ᔭ.

La misma reduccion de otro modo. Siendo cinco las cifras del número dado, búsquense las cuatro primeras potencias de hice, que es el número de la base digital.

1.ª potencia ↊. 2.ª 84. 3.ª 6ᔭ4. 4.ª 6.954.

La cifra de unidades simples es	1.
9 decenas cada una igual á ↊	76.
Ninguna centena	0.
5 unidades millares cada una igual á 6ᔭ4	1.8↊0.
1 decena millar igual á	5.954.
	7.6↊ᔭ.

De este modo son mas dificiles las reducciones, y por lo mismo las mas propias para ejercitarse en la tabla de nmltiplicar de la numeracion natural.

Capitulo XII

Esplicacion del sistema numérico natural por medio de la numeracion que le es propia.

Ya he manifestado que cualquiera numeracion es buena; pera esplicar el sistema natural de los números; pero de este modo no se puede dar sino una idea muy superficial ó confusa de sus utilidades y ventajas, cuyo descubrimiento solo se consigue por medio de la numeracion que se conforma con dicho sistema por tener la misma i base, como se vé en la siguiente.

TABLA DEMOSTRATIVA DEL SISTEMA NATURAL DE LOS NÚMEROS Y DE LA NUMERACION NATURAL.

Traternarios.	0.	10.	20.	30.	40.
Primos estremos.	1.	11.	21.	31.	41.
Binarios puros.	2.	12.	22.	32.	42.
Ternarios puros.	3.	13.	23.	33.	43.
Tetrácticos puros.	4.	14.	24.	34.	44.
Primos medios.	5.	15.	25.	35.	45.
Biternarios.	6.	16.	26.	36.	46.
Primos medios.	7.	17.	27.	37.	47.
Tetrácticos puros.	8.	18.	28.	38.	48.
Ternarios puros.	9.	19.	29.	39.	49.
Binarios puros.	↊.	1↊.	2↊.	3↊.	4↊.
Primos estremos.	↋.	1↋.	2↋.	3↋.	4↋.
Traternarios.	10.	20.	30.	40.	50.

OBSERVACIONES SOBRE LA TABLA Y FIGURA QUE PRECEDEN.[↊]

1.ª Conocidas las propiedades esenciales de cada número de la base, se saben las de cualquier otro con solo ver la cifra con que termina; porque todo número tiene la propiedad ó propiedades de su cifra final.

Son primos los que terminan en 1, 5, 7 ó ↋, que tienen la 1.ª propiedad.

Son binarios los que terminan en 2, 6 ó ↊, que tienen la 2.ª .

Son ternarios los que terminan en 0, 3, 6 ó 9, que tienen la 3.ª .

Son tetrácticos los que terminan en 0, 4 ú 8, que tienen la 4.ª .

2.ª Los números de cada una de las siete clases que se forman atendiendo á sus propiedades esenciales, tambien se distinguen por las cifras en que terminan del modo siguiente.

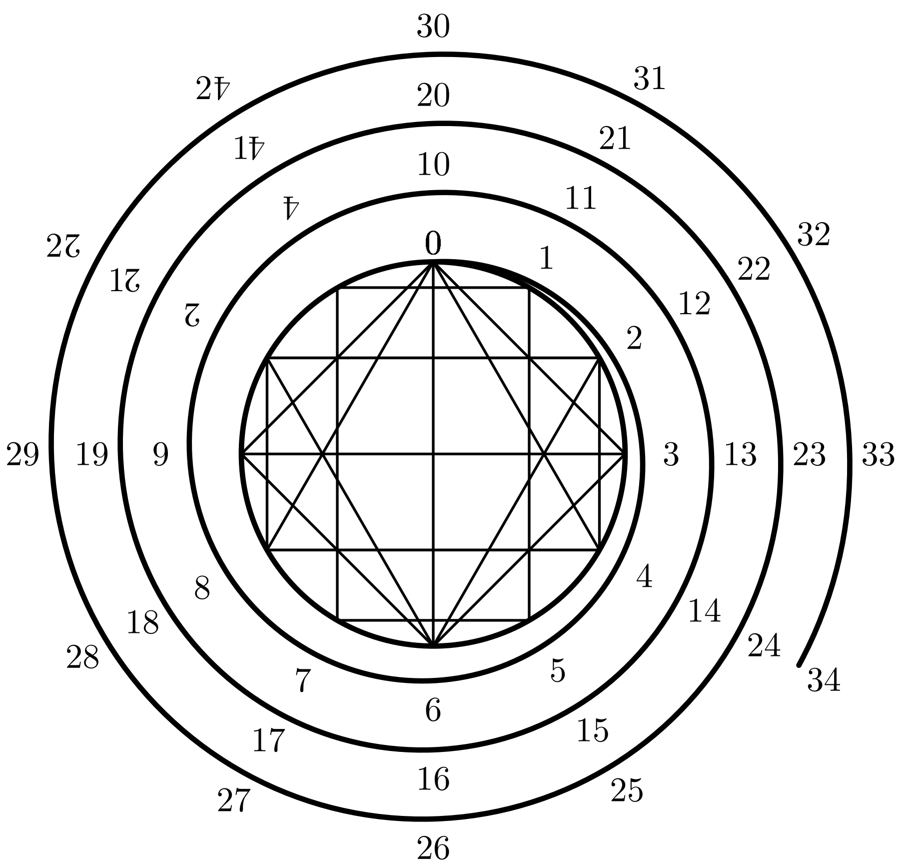
Los primos estremos en 1 ó en ↋, como 11 y 1↋; 21 y 2↋.

Los binarios puros en 2 ó en ↊, como 12 y 1↊; 22 y 2↊.

[↊]Figura trasladó a la página 4↊.—Ed.

FIGURA

QUE REPRESENTA EL SISTEMA NATURAL DE LOS NÚMEROS POR MEDIO DE LA NUMERACION DIGITAL



Los ternarios puros en 3 ó en 9, como 13 y 19; 23 y 29.

Los tetrácticos puros en 4 ó en 8, como 14 y 18; 24 y 28.

Los primos medios en 5 ó en 7, como 15 y 17; 25 y 27.

Los biternarios en 6, como 16; 26; 36; 46.

Los traternarios en cero, como 10; 20; 30; 900.

3.ª El primer período en que se verifica la armonía, combinaciones y relaciones de las propiedades esenciales de los números, empieza en *nada* ó *cero*, y solo por medio de la numeracion natural se consigue que terminen siempre en cero los números en que empiezan y acaban todos los períodos.

4.ª Los números que ocupan el medio y que son como centros de sus respectivos períodos; es decir los biternarios terminan en 6, y los traternarios que se hallan á los estremos, terminan en cero; luego los números cardinales ó- fundamentales de todo el plan del sistema, que son los mistos, se conocen por sus finales 6 ó cero.

5.ª Supuesto que el doce digital y sus multiplices son los mismos números que terminan en cero segun la numeracion natural, se sigue que en esta son recíprocos cualesquiera dos números semejantes, cuya suma termine en cero, y por consiguiente se conocerá que dos números son recíprocos, en que las cifras finales de ambos son ceros ó suman diez, como 20 y 560; 4 y 128; 56 y 76. De esta observacion se sigue, que si un número cualquiera terminado en cero se divide en dos partes iguales ó desiguales, serán estas números semejantes.

6.ª Todo número que termine en 1, 2, 3, 4, ó 5 es puro anterior, y todo el que termina en 7, 8, 9, ↊ ó ↋ es puro posterior: los primos estremos anteriores terminan en 1 y los posteriores en ↋: los binarios puros anteriores en 2 y los posteriores ↊: los ternarios puros anteriores en 3 y los posteriores en 9: los tetrácticos puros anteriores en 4 y los posteriores en 8: los primos medios anteriores en 5 y los posteriores en 7: de modo que en el órden de sus clases proceden estos números de los estremos hácia el medio.

7.ª Los números consonantes son semejantes necesariamente, como 1, 11, 21, 51, que son primos estremos; 2, 12, 22, 102, que son binarios puros; pero todos los números semejantes no son consonantes.

8.ª Dos números puros recíprocos. no pueden ser consonantes; porque el uno es anterior y el otro posterior: ni dos consonantes pueden ser recíprocos; porque necesariamente han de ser ambos anteriores ó posteriores.

9.ª Dos números mistos semejantes son á la vez consonantes y recíprocos; porque ó terminan ambos en seis, en cuyo caso no son anteriores ni posteriores, ó en cero, y en este caso cada uno es á la vez anterior y posterior, supuesto que acaba un período y empieza otro.

10.ª En cinco números puros seguidos hay dos primos, uno estremo que termina en 1 ó en ↋ y otro medio en 5 ó en 7; dos binarios, uno sencillo que termina en 2 ó en ↊ y otro doble en 4 ó en 8, y un ternario que se halla en medio de los cinco y termina en 3 ó en 9.

11.ª Los tres números binarios sencillos que en el círculo de un período forman un triángulo equilátero, por hallarse á iguales distancias, son los que en todo período terminan en 2, 6 y ↊, como se vé en la figura.

12.ª Los tres números tetrácticos que forman tambien en el círculo un triángulo equilátero, son los que en todo período terminan en cero, 4 y 8.

13.ª Los cuatro primos que forman en el círculo un cuadrilongo, porque se hallan á distancias desiguales, terminan en 1, 5, 7 y 7̵ en todos los períodos; los cuatro binarios que no son ternarios y forman otro cuadrilongo en cruz con aquel, terminan en 2, 4, 8 y ↊, y los cuatro ternarios que forman un cuadrado, porque se hallan á iguales distancias, terminan en cero, 3, 6 y 9.

Si es admirable el sistema natural de los números, lo es mucho mas, que antes de ser conocido, se hubiesen dicho las siguientes palabras.

Quia enim duodenario sæpe numero solet in Scripturis universitas designari; per duodecim sedes apostolorum, omnium numerositas judicantium; et per duodecim tribus Israel, universitas eorum qui judicandi sunt.

Venerab. Beda, hom. in natali S. Benedicti.

Pues que con el número doce suele muchas veces designarse la universalidad en la sagrada Escritura; debe entenderse por las doce sillas de los apóstoles el conjunto de todos los que an de juzgar, y por las doce tribus de Israel la multitud de los que han de ser juzgados.

Et cum dicuntur duodecim partæ Jerusalem, et una porta Christus et duodecim portæ Christus, quia in duodecim portis Christus; et ideo duodenarius numerus apostolorum. Sacramentum magnum[7̵] *hujus duodenarii significatio est numeri. Sedebitis, inquit, super duodecim sedes, judicantes duodecim tribus Israel.*

S. August. in ps. 86.

Y cuando se dicen doce las puertas de Jerusalen, y Cristo una puerta y doce puertas tambien Cristo, es porque está Cristo en las doce, y por eso es doce el número de los apóstoles. La significacion de este número doce es un SACRAMENTO GRANDE ([7̵]). Os sentaréis, dijo, sobre doce sillas, juzgando las doce tribus de Israel.

En doce números se hallan las propiedades esenciales de todos y la armonía, relaciones y combinaciones de estas propiedades. De este modo es que todos los números se reducen á doce ó se hallan en doce, y no hay ninguno que no sea uno de los doce. Sin una inspiracion divina no ha podido ningun hombre designar la universalidad con el número doce, como se ha hecho en las sagradas letras ántes de haberse descubierto la armonía, relaciones y combinaciones, que se verificán en cualesquiera doce números seguidos. Desde que supo hablar el primer hombre, han debido espresarse los números segun elsistema de sus propiedades esenciales; pero solo era conocido de la SUPREMA INTELIGENCIA, que no quiso revelarlo, ni que se descubriese hasta hoy. ¿No será este descubrimiento el preludio de alguna época feliz? ¿No será el número 12 el pitipié ó metro secreto del plan general de las obras del Criador? A lo menos en el apocalipsis, capítulo 24, se dice lo siguiente. La ciudad santa de Jerusalen que descendia del cielo de la presencia de Dios, tenia un muro grande y alto con doce puertas, y en las puertas doce ángeles, y los nombres escritos de las doce tribus de Israel. Y el muro de la ciudad tenia doce fundamentos, y estos doce los nombres de los doce apóstoles del Cordero. Y la ciudad es cuadrada… y tenia doce mil estadios: y la longitud y la altura y la anchura de ella son iguales. Y su muro tenia ciento cuarenta y cuatro codos (cuadrado de doce).

[7̵] *Sacramentum, generaliter loquendo, significat mysterium seu rem ocultam.* S. Ligorius.

Sacramento, hablando en general, significa misterio ó cosa oculta.

Capitulo XIII

Observaciones acerco de la tabla de multiplicar de la numeracion natural, pag. 46.

1.ª Cuando un factor es traternario, cualquiera que sea el otro factor, es traternario tambien el producto, y termina siempre con una misma cifra, que es el cero.

2.ª Cuando un factor es biternario, cualquiera que sea el otro, no puede ser el producto sino biternario ó traternario, y por consiguiente solo puede terminar con dos cifras diferentes, que son el cero, si el otro factor es número par, ó el 6 si es impar. Véase el! sesto cuadro de la table.

3.ª Cuando uno de los factores es tetráctico puro, no puede ser el producto sino tetráctico ó traternario, y por consiguiente será su cifra final una de estas tres: 0, 4, 8, las cuales se hallan en este órden en los produotos del cuarto cuadro, y en órden inverso en los del octavo.

4.ª Cuando uno de los factores es ternario puro, puede ser el producto ternario puro, biternario ó tetráctico; de modo que termina precisamente en una de estas cuatro cifras 0, 3, 6, 9, las cuales se hallan en este órden en los productos del tercer cuadro, y en órden inverso en los del nono.

5.ª Si uno de los factores es binario puro, puede ser el producto binario puro, tetráctico, biternario ó traternario, no pudiendo terminar sino con alguna de las seis cifras de números pares, que son 0, 2, 4, 6, 8 y ↊, las cuales se hallan por su órden en los finales de los productos del segundo cuadro y en órden inverso en los del biceno.

6.ª En cada uno de los cuadros primero, quinto, sétimo y sixeno se hallan las diez cifras (doce digital) en las finales de los productos; de modo que siendo primo uno de losidos factores, puede terminar el producto con cualquiera de las diez cifras, debiendo ser consonante ó recíproco del otro factor. En el cuadro primero se hallan las cifras finales de los productos en el órden de la escala, y en el sixeno en órden inverso. En el cuadro sétimo se hallan en órden directo, pero separadamente los pares 0, 2, 4, 6, 8 y ↊ de los impares 1, 3, 5, 7, 9 y ↋, y en el quinto en órden inverso con la misma separacion.

7.ª La primera columna de cada cuadro consta de una misma cifra repetida diez veces, la cual si es número primo se halla una sola vez en los finales de los productos, como en los cuadros primero, quinto, sétimo y sixeno; si es número binario puro se halla dos veces en dichos finales, como en los cuadros segundo y biceno; si es ternario puro se halla tres veces, como en los cuadros tercero y nono; si es biternario seis veces, como en el sesto, y si fuera traternario se hallaria diez veces. Todos los casos en que el producto es consonante con el primero de los dos factores se hallan en la tabla siguiente.

1	vez 1	es 1.	3	v.ˢ 1	son 3.	8	v.ˢ 1	son 8.	0	v.ˢ 1	son 0.
			3	5	13.	8	4	28.	0	2	0.
5	1	5.	3	9	23.	8	7	48.	0	3	0.
						8	↊	68.	0	4	0.
7	1	7.	9	1	9.				0	5	0.
			9	5	39.	6	1	6.	0	6	0.
↊	1	↋.	9	9	69.	6	3	16.	0	7	0.

						6	5	26.	0	8	0.
2	1	2.	4	1	4.	6	7	36.	0	9	0.
2	7	12.	4	4	14.	6	9	46.	0	↊	0.
			4	7	24.	6	↋	56.	0	↋	0.
↊	1	↊.	4	↊	34.						
↊	7	5↊.				0	0	0.			

8.ª Los casos en que el producto es consonante con el segundo factor se hallan en la tabla que sigue, cuyas proposiciones son las mismas de la anterior espresadas y combinadas de distinto modo.

0	v^s 0	0.	4	v.^s 0	0.	9	v.^s 0	0.	1	v.^s 1	son 1.
			4	4	14.	9	3	23.	1	2	2.
2	0	0.	4	8	28.	9	6	46.	1	3	3.
						9	9	69.	1	4	4.
6	0	0.	↊	0	0.				1	5	5.
			↊	4	34.	7	0	0.	1	6	6.
8	0	0.	↊	8	68.	7	2	12.	1	7	7.
						7	4	24.	1	8	8.
3	0	0.	5	0	0.	7	6	36.	1	9	9.
3	6	16.	5	3	13.	7	8	48.	1	↊	↊.
			5	6	26.	7	↊	5↊.	1	↋	↋.
↋	0	0.	5	9	39.						
↋	6	56.				1	0	0.			

9.ª De las dos tablas precedentes resulta, que el producto es consonante con los dos factores en solo cuatro casos; primero: cuando son traternarios, porque terminan en 0, y 0 vez 0 es 0; segundo: cuando son primos estremos anteriores, porque terminan en 1, y 1 vez 1 es 1; tercero: cuando son tetrácticos puros anteriores, porque terminan en 4, y 4 veces 4 son 14; cuarto: cuando son ternarios puros posteriores, porque terminan en 9, y 9 veces 9 son 69.

10.ª Cuando los dos factores son consonantes, solo puede terminar el producto en 1, 4, 9 ó cero: termina en 1 si los factores son primos medios ó estremos; en 4 si los factores son binarios puros ó tetrácticos puros; en 9 si son ternarios puros, y en 0 cuando son biternarios ó traternarios, como se vé en la tabla siguiente.

1	vez 1	es 1.	2	v.^s 2	son 4.	3	v.^s 3	son 9.
5	5	21.	4	4	14.	6	6	30.
7	7	41.	8	8	54.	9	9	69.
↋	↋	↊1.	↊	↊	84.	10	10	100.

11.ª Las proposiciones en que el primer factor y el producto son recíprocos, se hallan del modo siguiente: una sola en los cuadros primero, quinto, sétimo y sixeno en que el primer factor es número primo; dos en el segundo y en el biceno; tres en el tercero y en nono; cuatro en el cuarto y en el octavo; seis en el sesto y diez en el que fuere traternario el factor primero. Estas proposiciones son las de la tabla siguiente.

1	vez ↋	es ↋.	3	v.^s 3	9.	8	v.^s 2	14.	0	v.^s 1	0.
			3	7	19.	8	5	34.	0	2	0.
5	↊	47.	3	↋	29.	8	8	54.	0	3	0.

						8	↋	74.	0	4	0.
7	↋	65.	9	3	23.				0	5	0.
			9	7	53.	6	1	6.	0	6	0.
↋	↋	↊1.	9	↋	83.	6	3	16.	0	7	0.
						6	5	26.	0	8	0.
2	5	↊.	4	2	8.	6	7	36.	0	9	0.
2	↋	1↊.	4	5	18.	6	9	46.	0	↊	0.
			4	8	28.	6	↋	56.	0	↋	0.
↊	5	42.	4	↋	38.						
↊	↊	92.				0	0	0.			

12.ª Los casos en que son recíprocos el segundo factor y el producto, se hallan en la tabla siguiente, cuyas proposiciones son las mismas de la anterior espresadas y combinadas de distinto modo.

0	v.^{s} 0	es 0.	2	v.^{s} 0	son 0.	7	v.^{s} 0	son 0.	↋	v.^{s} 1	son ↋.
			2	4	8.	7	3	19.	↋	2	1↊.
4	0	0.	2	8	14.	7	6	36.	↋	3	29.
						7	9	53.	↋	4	38.
6	0	0.	8	0	0.				↋	5	47.
			8	4	28.	5	0	0.	↋	6	56.
↊	0	0.	8	8	54.	5	2	↊.	↋	7	65.
						5	4	18.	↋	8	74.
1	0	0.	3	0	0.	5	6	26.	↋	9	83.
1	6	6.	3	3	9.	5	8	34.	↋	↊	92.
			3	6	16.	5	↊	42.	↋	↋	↊1.
9	0	0.	3	9	23.						
9	6	46.				↋	0	0.			

13.ª De las dos tablas precedentes resulta, que el producto es recíproco de ambos factores en solo cuatro casos; primero: cuando los dos factores son traternarios, como 10 veces 10 son 100; segundo: cuando son ternarios puros anteriores, porque 3 veces 3 son 9; tercero: cuando son tetrácticos puros posteriores, porque 8 veces 8 son 54, y cuarto: cuando son primos estremos posteriores, porque ↋ veces ↋ son ↊1.

14.ª Un factor es recíproco del otro y del producto al mismo tiempo en los cuatro casos en que sus cifras finales sean las de las proposiciones siguientes: 0 vez 0 es 0; 3 veces 9 son 23; 8 veces 4 son 28; ↋ veces 1 son ↋.

0	v.^{s}	0	son	0.
1		↋		↋.
2		↊		18.
3		9		23.
4		8		28.
5		7		2↋.
6		6		30.

15.ª Cuando los dos factores son recíprocos, solo puede terminar el producto en una der estas cuatro cifras, 3, 8, ↋ ó cero. Termina en 3, cuando ambos factores son ternarios; en 8, cuando son binarios puros ó tetrácticos puros; en ↋, cuando son primos medios ó estremos; y en cero, cuando son biternarios ó traternarios. Véase la tabla del margen.

16.ª Los casos en que los productos no son semejantes entre sí ni con el producto, se reducen á los doce que se indican por las proposiciones de la tabla del márgen; de modo que si un factor es binario puro y el otro ternario puro, el producto es biternario; si un factor es ternario puro y el otro tetráctico puro, el producto es traternario, y tambien lo es, cuando un factores tetráctico puro y el otro biternario.

2	v.^{s}	3	son	6.
2		6		10.
2		9		16.
3		4		10.
3		8		20.
3		↊		26.
4		6		20.
4		9		30.
6		8		40.
6		↊		50.
8		9		60.
9		↊		76.

17.ª El producto es primo, solo en el caso de que lo sean ambos factores; pero termina en 1, cuando estos son consonantes, como 5 veces 5 son 21; 7 veces 7 son 41 &c.; en 5, si ambos son anteriores ó posteriores, y por consiguiente uno estremo y otromedio, como 5 veces 1 son cinco; ᔭ veces 7 son 65. Si los factores no son consonantes ni recíprocos, ni pertenecen á un mismo órden anterior ó posterior, termina en 7 el producto, como 5 veces ᔭ son 47; y termina en ᔭ, cuando los factores son recíprocos, como 1 vez ᔭ es ᔭ; 5 veces 7 son 24: luego un número primo solo puede tener divisores primos.

1	vez	2	es	2.
1		↊		↊.
5		2		↊.
5		↊		42.
7		2		12.
7		↊		5↊.
ᔭ		2		1↊.
ᔭ		↊		92.

18.ª El producto es binario puro solo en el caso de que lo sea uno de los factores ya el otro un número primo; si termina este en 1 ó en 7, serán consonantes el producto y el otro factor, y serán recíprocos, si el factor primo termina en 5 ó en ᔭ. Luego los divisores de un binario puro son primos ó binarios puros nada mas.

19.ª El producto es ternario puro en dos casos solamente; primero: cuando un factor es tambien ternario puro y el otro primo; si este es anterior, serán consonantes el producto y el otro factor, y serán. recíprocos si el factor primo es posterior: el segundo caso es cuando ambos factores son ternarios puros, como 3 veces 3 son 9; 3 veces 9 son 23. Luego los divisores de un ternario puro solo pueden ser primos ó ternarios puros; pero los primos nunca llegan á la mitad, por ejemplo: los divisores de 89 son 3, 5, 7, 13, 19, 2ᔭ y 89, entre los cuales solo hay tres primos 5, 7 y 2ᔭ; mientras que pueden ser ternarios puros todos los divisores, como los de 69 que son 3, 9, 23 y 69.

1	vez	3	es	3.
1		9		9.
5		3		13.
5		9		39.
7		3		19.
7		9		53.
ᔭ		3		29.
ᔭ		9		83.

20.ª El producto es tetráctico puro en cuatro casos. El primero, cuando un factor es tambien tetráctico puro y el otro primo; si termina este en 1 ó en 7, son consonantes el producto y el otro factor, y son recíprocos si el factor primo termina en 5 ó en ᔭ. El segundo caso es, cuando ambos factores son tetrácticos. El tercero, cuando ambos son binarios puros. El cuarto, cuando el uno es binario y el otro tetráctico puro.

		1.^r caso.		
1	vez	4	es	4.
1		8		8.
5		4		18.
5		8		34.
7		4		24.
7		8		48.
ߤ		4		38.
ߤ		8		74.
		2.^o caso.		
4	v.^s	4	son	14.
4		8		28.
8		8		54.
		3.^r caso.		
2	v.^s	2	son	4.
2		↊		18.
↊		↊		84.
		4.^o caso.		
2	v.^s	4	son	8.
2		8		14.
↊		4		34.
↊		8		68.

De esta observacion se sigue, que los divisores de un número que termina en 4 ó en 8, no pueden ser ternarios de ninguna clase, sino solo primos, binarios puros ó tetrácticos puros; mas nunca serán los primos tantos como los binarios, ni estos mas que los tetrácticos, los cuales pueden ser mas que los binarios. Los divisores de 18 son 2, 4, 5, ↊ y 18, un primo, dos binarios y dos tetrácticos. Cuando no hay ningun primo entre los divisores de un tetráctico, uno solo es binario puro y los demas son tetrácticos; los divisores del 54 son 2, 4, 8, 14, 28 y 54 en que no hay ningun primo. Todo número tetráctico tiene necesariamente un divisor binario puro, y los demas que tuviere de esta cíase serán tantos como los primos.

		1.^r caso.		
1	vez	6	es	6.
5		6		26.
7		6		36.
ߤ		6		46.
		2.^o caso.		
2	v.^s	3	son	6.
2		9		16.
↊		3		26.
↊		9		76.
		3.^r caso.		
3	v.^s	6	son	16.
3		6		46.

21.ª El producto es biternario en tres casos. Primero: cuando uno de los factores es biternario y el otro primo. Segundo: cuando el uno es binario y el otro ternario puro. Tercero: cuando el uno es ternario puro y el otro biternarío.

De esta observacion se sigue, que los divisores de un número que termina en 6, no pueden ser tetrácticos ni traternarios, pero si de cualquiera otra clase. Los primos nunca serán tantos como los binarios puros, ni estos mas que los ternarios, que tampoco serán mas que los biternarios. Cuando no hay ningun primo, solo uno es binario puro, como puede verse en los divisores de 16 y 46.

22.ª Los casos en que el producto es traternario se pueden reducir á dos solamente; primero: cuando los factores son recíprocos, y segundo: cuando uno de ellos es traternario cualquiera que sea la clase del otro. Siempre que no haya ningun número primo entre los divisores de un traternario, uno solo es binario puro.

Muchos traternarios hay que no tienen divisores primos, pero ninguno que no los tenga de todas las demas clases.

23.ª El doble de las decenas y las unidades de cada uno de los productos del 5 (cuadro quinto de la tabla) suman cinco ó un multíplice de cinco; en el producto 13 doblado el 1, son 2 y 3 son 5; en 39 doblado el 3, son 6 y 9 son 13 (15 actual) que es multíplice de 5.

24.ª En los productos del 7 (cuadro sétimo) el doble de las decenas es igual á la cifra final, quitando 7 de una cosa y otra, si fuesen mayores. En el producto 12 doblado el 1, son 2 que es la otra cifra; en 19 doblado el 1, son 2, y de 9 quitando 7, quedan 2; en 41 doblado el 4, son 8, quitando 7, queda 1.

25.ª Las cifras de cualquier producto de Ⱦ suman Ⱦ, como 2 y 9 del producto 29; 8 y 3 del producto 83. Esto mismo sucede respecto del 9 en la tabla de multiplicar segun la numeracion digital.

Capitulo XIV

Ventajas de la numeracion natural sobre todas las demas conocidas y no conocidas.

No es fácil descrubrir todas las ventajas de la numeracion natural sobre la actual y sobre todas las demas; cuanto mas se practicare aquella, tanto mas se irán conociendo sus ventajas. Las que se descubren al primer exámen, son las siguientes.

primera.

Todo número espresado segun la numeracion natural, es de la clase de su cifra final, por mas que se cambien las demas ó que se aumenten otras, y por consiguiente basta saber á que clase pertenece cada número de la base; así es que todo el que termina en 1, 5, 7 ó Ƭ es primo; si termina en cero es traternario; si en 2 ó en Ʒ es binario puro &c. Esto no sucede en ninguna otra numeraccion; en la digital que ahora usamos, el número 1 es primo y el 21 ternario; el 2 es binario puro y el 12 traternario; el 3 es ternario y el 13 primo.

segunda.

En la numeracion natural se sabe muy facilmente cuantos números de cada clase hay en la escala de ciento, de mil ó la que se quiera; porque si en toda decena (docena actual) hay dos primos estremos, do binarios puros, dos ternarios puros.. . . , es muy obvio que en cada ciento, que consta de diez decenas, hay 20 primos estremos, 20 binarios puros, 20 ternarios. . . ; en cada mil, 200 primos estremos, 200 binarios puros, 200 ternarios puros. . . ; en cada diez mil 2.000 primos estremos, 2.000 binarios puros &c.; pero no solo se sabe cuantos, sino tambien cuales son; porque los primos estremos son todos los que terminan en 1 ó en Ƭ; los binarios puros en 2 ó en Ʒ &c.

tercera.

Los números simples, que son los que no se pueden dividir por ningun otro sino solo por sí mismos, se descubren en la numeracion natural con mucho menos trabajo que en ninguna otra; porque todo número simple es primo, esceptuando solamente el 2 entre los binarios y el 3 entre los ternarios. Ya se sabe que en cada diez números hay cuatro primos que terminan en 1, 5, 7 y Ƭ: luego en cada 100 (144 digital) solo hay que examinar 40 (48 digital) que es la tercera parte. Para averiguar, pues, si un número primo tiene partes alicuotas ademas de la unidad, debe tenerse presente; primero: que si las tiene, son necesariamente números primos; segundo: que la mayor de todas es la quinta ó menor que la quinta parte; y tercero: que si el número dado termina en 1, deben hallarse sus partes alicuotas de dos en dos primos consonantes, calculando que el mayor de los dos sea la quinta parte ó menor que esta, y calculando esto mismo, deben hallarse de dos en dos primos anteriores ó posteriores, si el número dado termina en 5; de dos en dos recíprocos, si termina en Ƭ, y de dos en dos que no sean consonantes, ni recíprocos, ni pertenezcan á un mismo órden anterior ó posterior, si termina en 7. (Véase la observacion 17 página 54.) Para proceder mas facilmente, se partirá el número dado por el primo que pueda ser su raiz cuadrada ó el inferior mas cercano á esta raiz, y luego por otros menores; si de este modo no se encuentra ningun divisor exacto, es simple el número dado.

CUARTA.

De la primera ventaja se sigue, que con solo ver la última cifra de un número, se conoce si se puede dividir por 2, 3, 4, 6 y 10; porque si termina en 2 ó en ↊, se divide por 2 y su mitad es siempre un número primo; si termina en 3 ó en 9, se divide por 3; si en 4 ú 8, por 2 y por 4; si en 6, por 2, por 3 y por 6, y si en cero, por 2, 3, 4, 6 y 10.

QUINTA.

Cuando las decenas y las unidades simples ó sea las dos últimas cifras componen un número multíplice de 8 ó de 9, por mas que se cambien o se aumenten otras hácia la izquierda, siempre se dividirá por 8 ó por 9 el número que resulte; así es que los números 12.334 y 22.134 se pueden dividir por 8, porque 34 (40 digital) es multíplice de 8; los números 12.346 y 32.146 se pueden dividir por 9, porque 46 (54 digital) es multíplice de 9; los números 12.360 y 32.160 se dividen á la vez por 8 y por 9, porque 60 (72 digital) es multíplice de 8 y de 9.

Demonstracion. Si 60 es multíplice de 8 y de 9, tambien lo es el duplo de 60 que es 100, y todo número cuyas dos últimas cifras sean ceros, porque es necesariamente multíplice de 100: luego si en lugar de estos ceros hay dos cifras positivas que compongan un número multíplice de 8 ó de 9, lo será tambien todo el número por mas que se cambien ó aumenten las demas cifras.

Del mismo modo que se conocen los números que se dividen por 8 y por 9, se conocen tambien los que se dividen por 14, 16, 20, 30, 40 y 60, porque tambien son partes alicuotas del 100 natural.

El número que se divide por 8, no puede terminar sino en 4, en 8 ó en cero: si termina en 4 ó en 8 se divide tambien por 2 y por 4, y si termina en cero, por 2, 3, 4, 6 y 10 ademas del 8.

El que se divide por 9, termina precisamente en 3, 6, 9 ó cero, y ademas del 9 se divide tambien por 3, si la última cifra es 3 ó 9; por 2, 3 y 6 si termina en 6, y por 2, 3, 4, 6 y 10 si termina en cero.

SESTA.

En la numeracion natural se sabe que los números *decimales* no pueden tener divisores primos: luego no se pueden dividir por ↊, 13, 18, 21… que son multíplices de 5; ni por 12, 19, 24, 2↋… que son multíplices de 7; ni por ningun númem cuyas cifras suman ↋, como 1↊, 29, 38; &c. porque son multíplices de ↋; ni por números que consten de dos cifras iguales, como 11, 22, 33 &c., porque son multíplices de 11. Luego entre las partes alicuotas de un número decimal no puede haber ningun número primo ni multíplice de primo, esceptuando el 1 solamente. Lo mismo que sucede con los números decimales respecto de los primos, sucede tambien con toda potencia, cuya raiz no sea número primo ni multíplice de algun primo.

SÉTIMA.

Para saber si un número es divisible por cinco, se doblará la primera cifra de la izquierda y se sumará con la que sigue; sacados los cincos de esta suma, se doblará el resto y se sumará con la cifra que sigue, y prosiguiendo de este modo, si al fin sobran cinco ó nada, será divisible por 5 el número propuesto. Sea 3.123, y empezando por la izquierda, se dirá: doblado el 3, son 6, y 1 que sigue, son 7; quitando 5, quedan 2; doblado este, son 4, y 2 que siguen, son 6; quitando 5, queda uno; doblado este resto, son 2 y 3, que es la última cifra, son 5.

Siempre que siga un cero, se doblará el número ó resto anterior. Dado el número 1.002, se dirá: doblado el 1, son 2; doblado este 2, porque sigue cero, son 4; doblado este 4, porque sigue otro cero, son 8; quitando 5, quedan 3 y 2, que es la última cifra, son 5.

El número que se divide por 5, si es binario puro se divide tambien por 2 y por Ƨ; si es ternario por 3 y por 13; si es tetráctico por 2, por 4, por Ƨ y por 18; si es biternario por 2, 3, 6, Ƨ, 13 y 26, y si es traternario por 2, 3, 4, 6, Ƨ, 10, 13, 18, 26 y 50.

OCTAVA.

Para saber si un número es divisible por 7, se doblará la primera cifra de la izgierda, y quitados los sietes, se restará de la cifra que sigue; doblado este residuo y quitados los sietes, se restará de la cifra que sigue, y prosiguiendo de este modo si al fin quedan 7 ó nada, será divisible por 7 el número propuesto. Sea 1.898, y empezando por la izquierda, se dirá: doblado el 1, son 2; restados del ocho que sigue, quedan 6; doblados, son 10 (12 digital); quitando 7, quedan 5; restados del 9 que sigue, quedan 4; doblados, son 8; restados de 8 que es la última cifra, nada.

Para esta operacion se contará el cero como 7 ó se añadirá este número al valor de la cifra, cuando sea mayor el número que se le ha de restar, y entonces podrá hacerse la sustraccion. Dado el número 11.006 se dirá: 1 doblado, son 2; restados de 8 (1 que sigue y 7 que se le añaden), quedan 6; dobladas, son 10; quitando 7, quedan 5; restados de 7 (porque sigue cero), quedan 2; doblados, son 4; restados de 7 (que es el otro cero), quedan 3; doblados, son 6; restados de 6, nada.

Si el número que se divide por 7 es binario, se divide tambien por 2 y por 12; si es ternario por 3 y por 19; si es tetráctico por 2, 4, 12 y 24; si es biternario por 2, 3, 6, 12, 19 y 36, y si es traternario por 2, 3, 4, 6, 10, 12, 19, 24, 36 y 70.

NONA.

Para saber si un número se divide por Ⱦ, súmense las cifras quitando sixes, (cuya operacion se hará como en la numeracion digital, para echar fuera los nueves), y si no sobra nada, se podrá dividir por Ⱦ el número propuesto. Sea 6.98Ƨ, y empezando por la izquierda se dirá: 6 y 9 son 13 (15 digital); quitando Ⱦ, quedan 4, y 8 son 10; quitando Ⱦ queda 1, y Ƨ que es la última cifra, son Ⱦ.

Si el número que se divide por Ⱦes binario, se divide tambien por 2 y por 1Ƨ: si es ternario, por 3 y por 29; si es tetráctico, por 2, 3, 6, 1Ƨ, 29 y 56, y si es traternario, por 2, 3, 4, 6, 10, 1Ƨ, 29, 38, 56 y Ⱦ0.

DÉCIMA.

Las partes alicuotas de los números decimales naturales son proporcionalmente mas y de mayor importancia que las de los decimales de cualquiera otra numeracion. Ya se ha visto que las del 10 digital son 1, 2 y 5 y las del 10 natural 1, 2, 3, 4 y 6; las del 100 digital son 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25 y 50, en que hay tres números primos, tres binarios puros y dos tetrácticos puros, y las del 100 natural son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 14, 16, 20, 30, 40 y 60; en que hay un solo número primo, un binario puro, dos ternarios puros, tres tetrácticos puros, dos biternarios y cinco traternarios. Compárense los decimales de cualquiera numeracion con los naturals, y siempre se encontrará en estos una gran ventaja. Luego la suma de las partes alicuotas de los decimales naturales es proporcionalmente mayor, que la suma de las partes alicuotas de los decimales de cualquiera otra numeracion.

UNDÉCIMA.

En el sistema natural es mas fácil que en ningun otro hallar un multíplice de los números que se quiera, como se vé del problema siguiente:

Hallar un multíplice de los números 2, 3, 4, 5 &c. hasta 10.

Resolucion. Supuesto que el número 60 se puede dividir por 2, 3, 4, 6, 8, 9 y 10, no faltan mas que 5, 7, ↊ y ↋: un multíplice de 5, 7 y ↋ solo puede hallarse multiplicando 5 por 7 que son 2↋, y este producto por ↋ que son 281: multiplíquese este número por 60, y el producto 14.060 se podrá dividir por todos los números de la base natural, incluyendo el ↊, porque todo número divisible por 2 y por 5, tambien los es por ↊.

DUODÉCIMA.

Los quebrados que se reducen á decimales exactos son muchos mas y se conocen mas facilmente en la numeracion natural que en ninguna otra.

Todo quebrado cuyo denominador no sea un número primo ni divisible por algun primo, se reduce á decimales exactos, sea ó no sea primo el numerador, y aunque este no sea parte alicuota del denominador.

$^2/_3$	igual á	0,8.	$^4/_9$	igual á	0,54.
$^1/_4$	=	0,3.	$^{11}/_{14}$	=	0,99.
$^5/_6$	=	0,↊.	$^{13}/_{16}$	=	0,↊.
$^5/_8$	=	0,76.	$^{17}/_{23}$	=	0,854.

Cuando el numerador, sea ó no sea primo, multiplicando por algun número, que no lo sea, produce el denominador, se reduce tambien este quebrado á decimales exactos, aunque el denominador tenga factores primos.

$^5/_↊$	es igual á	0, 6.
$^4/_{30}$	=	0, 14.

Un quebrado no se puede reducir á decimales exactos sino periódicos ó mistos; primero: siempre que el denominador sea un número primo; segundo: cuando el numerador multiplicado por algun primo, produce el denominador, y tercero: cuando el numerador no divide exactamente al denominador y este tiene algun divisor primo.

Acerca de estas fracciones decimales periódicas y mistas he hallado curiosidades que indican un órden ó plan general, y no me pareció fácil llegar á conocerlo perfectamente; con cuyo motivo y considerando que esta indicacion es aquí suficiente para mi intento, y que semejante empresa no puede llevarse al cabo con el mejor éxito sino por hombres inteligentes, suspendí mis investigaciones.

DECIMATERCIA.

En las progresiones aritméticas (ó equidiferentes) segun la numeracion natural, dada la razon y el primer número, se sabe la cifra final de los demas, ó con las cifras finales de los términos se sabe la razon.

Cuando las finales siguen el órden directo de la escala, la razon es 1 ó termina en 1, como ÷ 3 · 14 · 25 · 36, cuyas finales son 3, 4, 5, 6 y la razon es 11.

Cuando las finales estan en el órden inverso de la escala, la razon es ㄣ ó termina en ㄣ, como ÷ 9 · 18 · 27 · 36, cuyas finales son 9, 8, 7, 6.

Si alternando números pares é impares, siguen en sus finales diferente órden pero dírecto, ó sea de menor á mayor, la razon es 7 ó termina en 7, como ÷ 5 · 10 · 17 · 22 · 29 · 34 · 3ㄣ · 46, cuyas finales pares son 0, 2, 4, 6, y las impares 5, 7, 9,ㄣ.

Cuando del mismo modo estan unos y otros en órden inverso ó de mayor á menor, la razon es 5 ó termina en 5, como ÷ 6 · ㄣ · 14 · 19 · 22 · 27 · 30 · 35, cuyas finales pares son 6, 4, 2, 0 y las impares ㄣ, 9, 7, 5.

Cuando las cifras finales son todas pares ó todas impares, las razon es un binario puro, que terminará en 2 ó en Ƨ, segun dichas cifras se hallen en órden directo ó inverso.

Cuando las cifras finales son cuatro solamente, dos pares y dos impares que se repiten siempre en el mismo órden, la razon es un número ternario puro que termina en 3 si el órden es directo ó en 9 si es inverso.

Cuando las finales son tres pares ó tres impares, la razon es un tetráctico puro que termina en 4 si á la menor siguen las dos mayores, ó en 8 si á la mayor siguen las dos menores.

Cuando no son mas que dos las cifras finales, repitiéndose siempre las mismas, termina en 6 la razon.

Cuando es una misma la cifra final de todos los términos, la de la razon es un cero, como ÷ 4 · 14 · 24 · 34 ·, cuya razon es 10.

DECIMACUARTA.

Las progresiones geométricas (ó por cuociente) de la numeracion natural son precisamente *consonantes* ó *recíprocas* ó *alternadas.*

Las consonantes de la primera clase son aquellas, cuyos términos, sin esceptuar ninguno, tienen una misma cifra final, como ÷ 3 : 13 : 63 : 273; la cifra final de la razon y la del primer término de toda progresion de esta clase se hallan la tabla siguiente:

De la razon.		*Del primer término.*
0	=	0.
1	=	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ↋, ↋.
2	=	0.
3	=	0, 6.
4	=	0, 4, 8.
5	=	0, 3, 6, 9.
6	=	0.
7	=	0, 2, 4, 6, 8, ↊.
8	=	0.
9	=	0, 3, 6, 9.
↊	=	0, 4, 8.
↋	=	0, 6.

Segun la tabla precedente son consonantes de la primera clase las progresiones, cuando la cifra final de la razon es 0, 2, 6 ú 8 y la del primer término cero; cuando la final de la razon es 1, cualquiera que sea la del primer término; cuando la de la razon es 3 ó ↋ y la del primer término 0 ó 6 &c. Hay, pues, treinta y cuatro casos (40 digital) de estas progresiones.

Las progresiones consonantes de la segunda A clase son aquellas cuyos términos, esceptuando el primero, tienen una misma cifra final, como $\div$ 2 : 6 : 16 : 46 : 116; la cifra final de la razon y la del primer término de toda progresion de esta clase se hallan en la tabla piguiente.

De la razon.		*Del primer término.*
0	=	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ↊, ↋.
2	=	6.
3	=	2, 4, 8, ↊.
4	=	1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, ↊, ↋.
6	=	2, 4, 6, 8, ↊.
8	=	3, 6, 9.
9	=	1, 2, 4, 5, 7, 8, ↊, ↋.
↊	=	2, 6, ↊.

No puede ser de esta clase la progresion cuya razon sea un número primo. Los casos de estas progresiones son treinta y ocho (44 digital).

Las progresiones consonantes de la tercera clase son aquellas, cuyos términos, esceptuando los dos primeros, tienen una misma cifra final, como $\div$ 3 : 6 : 10 : 20 : 40 : 80. La cifra final de la razon y la del primer término de toda progresion de esta clase se hallan en la tabla siguiente.

De la razon.		*Del primer término.*
2	=	3, 9.
6	=	1, 3, 5, 7, 9, ↋.
↊	=	1, 3, 5, 7, 9, ↋.

No puede ser de esta clase la progresion cuyo primer término sea un núnmero par; ni aquellas cuya razon no sea un número binario puro ó biternario, ni aquella cuya razon termine en 2, siendo número primo el primer término. Los casos de estas progresiones son doce (14 digital).

Los casos de las progresiones consonantes de todas tres clases son:

De la 1.ª .	40 digital	=	34 natural.
De la 2.ª .	44	=	38.
De la 3.ª .	14	=	12.
	98	=	82.

Las progresiones recíprocas son tambien de tres clases: á la primera pertenecen aquellas en que cada término, sin esceptuar ninguno, es recíproco de su antecedente ó consiguiente; de modo que las cifras finales de los términos son dos que se van alternando, como ÷ 3 : 9 : 23 : 69 : 183 : 509.

Final de la razon.		*Del primer término.*
2	=	4, 8.
3	=	3, 9.
5	=	2, 4, 8, ↊.
7	=	3, 9.
8	=	4, 8.
↋	=	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, ↊, ↋.

No puede ser de esta clase la progresion cuya razon termina en 0, 1, 4, 6, 9 ó ↊; ni aquella en que sea un cero ó un 6 la cifra final del primer término: en cualquiera de estos casos la progresion es consonante precisamente.

Las recíprocas de la segunda clase son aquellas, en que la regla general no se verifica en el primer término, como ÷ 2 : 4 : 8 : 14 : 28 : 54 : ↊8.

Final de la razon.		*Del primer término.*
2	=	2, ↊.
3	=	1, 5, 7, ↋.
8	=	1, 3, 5, 7, 9, ↋.

No puede ser de esta clase la progresion cuyo primer término no sea un número primo ó binario puro.

Las progresiones recíprocas de la tercera clase son aquellas, en que la regla general no se verifica en el primero ni en el segundo término, lo cual no sucede, sino terminando en 2 la razon, y siendo un número primo el primer término, como ÷ 5 : ↊ : 18 : 34 : 68 : 114.

Los casos de las progresiones recíprocas son:

De la 1.ª clase	22	=	1↊	natural.
De la 2.ª .	12	=	10.	
De la 3.ª .	4	=	4.	
	38	=	32.	

Llamo progresiones alternadas aquellas en que al fin de los términos se repiten alternadamente dos cifras que no son recíprocas, como ÷ 1 : 5 : 21 : ↊5 : 441 : 1985. La razon de una progresion alternada termina precisamente en 5 ó en 7, y todos sus términos son números primos, de que se sigue que los casos de estas progresiones no son mas que ocho.

Final de la razon.		*Del primer término.*
5	=	1, 5, 7, ↋.
7	=	1, 5, 7, ↋.

Todos los casos de las progresiones consonantes son (segun la numeracion digital)	98.
Todos los casos de las recíprocas	38.
De las alternadas	8.
Todos los casos posibles de progresiones diferentes en las cifras finales de la razon y del primer término son	144.

DECIMAQUINTA.

Las potencias y sus raices tienen en la numeracion natural las relaciones siguientes.

Siempre que la raiz sea, un número impar ó termine en 0, 4 ú 8, terminarán precisamente todas las potencias impares, como la tercera, la quinta, la sétima &c., con la misma cifra que la raiz; y segun termine esta en 2, 6 ó ↊, terminarán dichas potencias en 8, 0 ó 4. Luego el número, cuya última cifra sea 2 ó ↊, no puede ser potencia impar, como no sea la primera.

Toda potencia par termina precisamente en 1, 4, 9 ó cero: en el primer caso es la raiz un número primo; en el segundo un binario ó tetráctico puro; en el tercero un ternario puro, y en el cuarto un biternario ó un traternario.[10]

[10] Tabla trasladó a la página 63. —Ed.

POTENCIAS DE LOS NÚMEROS DE LA BASE DE LA NUMERACION NATURAL.				
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1.	1.	1.	1.	1.
2.	4.	8.	14.	28.
3.	9.	23.	69.	183.
4.	14.	54.	194.	714.
5.	21.	↊5.	441.	1.985.
6.	30.	160.	900.	4.600.
7.	41.	247.	1.481.	9.887.
8.	54.	368.	2.454.	16.↋68.
9.	69.	509.	3.969.	2↊.209.
↊.	84.	6↋4.	5.954.	49.↊54.
↋.	↊1.	92↋.	8.581.	79.24↋.
10.	100.	1.000.	10.000.	100.000.

Capitulo XV

Del cuadrado mágico.

Se llama cuadrado mágico el formado con cierta porcion de números seguidos, pero colocados de tal modo en otras tantas casillas de un cuadro, que los de cada linea, vistos de la izquierda á la derecha, sumen tanto como los de cada columna, vistos de arriba hácia abajo y como los de cada una de las dos diagonales.

No sabiendo las reglas para disponer estos cuadrados, y solo por haber visto uno de 49 números, siete por cada lado ó sea en cada línea y en cada columna, quise formarlo con doce por cada lado, y no me fué posible, hasta que dispuesta la numeracion natural y sin mas que dos ensayos, formé el siguiente.

1	ᔭᔭ	3	ᔭ9	5	ᔭ7	ᔭ6	8	ᔭ4	↊	ᔭ2	10
ᔭ0	12	↊↊	14	↊8	16	17	↊5	19	↊3	14	↊4
21	9ᔭ	23	99	25	97	96	28	94	2↊	92	30
90	32	8↊	34	88	36	37	85	39	83	3ᔭ	81
41	7ᔭ	43	79	45	77	76	48	74	4↊	72	50
70	52	6↊	54	68	56	57	65	59	63	5ᔭ	61
60	62	5↊	64	58	66	67	55	69	53	6ᔭ	51
71	4ᔭ	73	49	75	47	46	78	44	7↊	42	80
40	82	3↊	84	38	86	87	35	89	33	8ᔭ	31
91	2ᔭ	93	29	95	27	26	98	24	9↊	22	↊0
20	↊2	1↊	↊4	18	↊6	27	15	↊9	13	↊ᔭ	11
ᔭ1	ᔭ	ᔭ3	9	ᔭ5	7	6	ᔭ8	4	ᔭ↊	2	100

Al formar este cuadrado, solo cuidé de que fuese una misma la suma de cada línea, de cada columna y de cada diagonal; pero esto que es todo lo que se busca en un cuadrado mágico, es la primera propiedad del que precede, siendo dicha suma 606.

Segunda propiedad. En las unidades de los números de cada línea se hallan las diez cifras (doce digital), seis impares en la mitad que empieza con el uno y las seis pares en la otra mitad. Así estas mitades de las líneas, como las de las columnas deben considerarse de los estremos hácia el medio.

Tercera. Sumando de dos en dos las cifras de decenas, se encontrarán en cada línea seis veces sixe y una mas. Esta decena mas debe considerarse último número de los de unidades, porque en cada línea debe haber todos los de la base inclusive el diez, ademas de los que componen seis veces sixe decenas. De aquí se sigue, que el número 10 que se halla en la primera línea, no debe considerarse con las decenas, sino como término de los números de unidades de esta linea; el ᔭ0 que está en la segunda, debe considerarse bicenta y diez, correspondiendo este diez al órden de unidades de esta línea, y correspondiendo bicenta al órden de los números de decenas de la primera columna: por las mismas razones treinta es veinte y diez; noventa, ochenta y diez, y así todos los números que terminan en cero, los cuales se hallan en la primera y última columna.

Cuarta. En las decenas de los números de una misma columna se encontrarán las diez cifras. Esta regla no se verifica en la primera ni en la última columna; pero entre las dos se encontrarán dos veces las diez cifras.

Bien entendido lo que se ha dicho acerca de la tercera propiedad, no será difícil comprender que es aparente la escepcion de la cuarta; porque si en cada número de decenas se cuenta una menos, se sigue que el diez no debe considerarse decena en cuanto á las de la columna; el Ᵽ0 es Շ0; el 30 es 20 &c. De este modo se verá, que en la primera y en la última columna se verifica tambien esta cuarta propiedad.

Quinta. Sumando de dos en dos las cifras de unidades, se, encontrarán en cada columna seis veces once (13 dig.). Esta regla no se verifica al parecer en la primera ni en la última columna; pero téngase presente que en cada línea hay una decena en el número que termina en cero, correspondiente á los números de unidades; esta decena y la unidad del número que está debajo componen once.

Sesta. Los números de la diagonal que empieza con el uno, se hallan en progresion, cuya diferencia es 11; y los de la diagonal que empieza con el diez, forman otra progresion, cuya diferencia es Ᵽ (11 digital).

Sétima. Cualesquiera dos números que se hallen en casillas opuestas, suman 101. Llamo casillas opuestas las que se encuentran á iguales distancias del centro, en cuadrantes opuestos y en una misma diagonal ó á distintos lados de ella; luego estan en casillas opuestas los números 1 y 100; 10 y Ᵽ1; 24 y 99; 51 y 70 &c.

Octava. Todo número puro (ó de una propiedad) tiene inmediato á la izquierda ó á la derecha el número con que completa ciento, como 1 y ᵽᵽ; 75 y 47; 39 y 83. En cuanto a los mistos, un traternario de la primera columna completa ciento con otro de la última y de línea anterior, como Ᵽ0 y 10; 90 y 30; y un bitemarío completa ciento con otro de la misma columna á igual distancia del medio, como 96 y 26; 56 y 66.

Nona. Todo número, sea puro ó misto, tiene inmediato á la izquierda ó á la derecha el número con que compone ciento y dos, como ᵽᵽ y 3; 2 y 100; 90 y 32; esceptuando los que termínan en 1 que componen 102 uno de la primera columna con otro de la última, como 21 y Շ1; 41 y 81; tambien se esceptuan los que terminan ei 7, que se hallan en una misma columna y á iguales distancias del medio, los que componen 102, como 97 y 27; 57 y 67.

Décima. Todo número tiene inmediato encima ó debajo aquel con que compone Ᵽ1, como 1 y Ᵽ0; Շ0 y 11; 66 y 47; 65 y 48. De esta regla se esceptuan los de 51 á 60 inclusives, cada uno de los cuales compone Ᵽ1 con otro de la misma línea á igual distancia del medio, y tambien se esceptuan los de Ᵽ1 á 100.

Undécima. Todo número tiene tambien inmediato encima ó debajo aquel con que compone 111,como 11 y 100; Ᵽ0 y 21; 55 y 78; 56 y 77: esceptuándose los de 61 á 70 inclusives, cada uno de los cuales compone 111 con otro de a la misma línea á igual distancia del medio, y tambien deben esceptuarse los de 1 á 10, ninguno de los cuales tiene compañero para completar dicho número.

Duodécima. En cada cuadrante de este cuadrado mágico, vistas las casillas diagonalmente, se observará que las cifras siguen el órden de la escala ya subiendo ó ya bajando, así las de unidades como las de decenas; pero debe tenerse presente que el 10 debe considerarse 00; el Ᵽ0, Շ0; el 30, 20 &c.

Todo cuadrado mágico se ha mirado por los inteligentes como cosa de mera curiosidad, porque nada útil se ha encontrado en los que se han dispuesto hasta ahora; sin embargo, el que tiene por fundamento el NÚMERO PERFECTO, dispuesto segun la numeracion natural, no puede menos que tener alguna utilidad. Entre tanto, sus doce propiedades lo hacen digno de la atencion de los mas sabios matemáticos.

Tambien puede disponerse el cuadrado mágico con solo los diez números de la base, cuidando de que se hallen todos en cada columna y en cada línea como en el siguiente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	↊	↋	10
2	4	6	8	↊	10	1	3	5	7	9	↋
3	6	9	10	2	8	5	↋	1	4	7	↊
4	8	10	2	7	↊	3	6	↋	1	5	9
5	↊	2	7	10	4	9	1	6	↋	3	8
6	10	8	↊	4	↋	2	9	3	5	1	7
7	1	5	3	9	2	↋	4	↊	8	10	6
8	3	↋	6	1	9	4	10	7	2	↊	5
9	5	1	↋	6	3	↊	7	2	10	8	4
↊	7	4	1	↋	5	8	2	10	9	6	3
↋	9	7	5	3	1	10	↊	8	6	4	2
10	↋	↊	9	8	7	6	5	4	3	2	1

En este cuadrado mágico hay seis, uno dentro de otro: en el primero cada línea, cada columna y cada diagonal, suma 66. El que sigue dentro de este, consta de dos números menos por cada lado, y cada línea y cada columna suma 55. Dentro de este se halla el tercero cuyas líneas y columnas suman cada una 44. Las del cuarto suman 33, las del quinto 22, y en las del sesto, que consta solo de cuatro números, suman 11 los dos de cada línea y de cada columna.

Capitulo XVI

Aplicaciones de la numeracion natural á la táctica militar y á la arquitectura.

Si llega á establecerse la numeracion natural, podrá dividirse la tropa en *decurias*, ó sea en partidas de diez hombres (doce digital) y el caporal ó decurion que debe mandarlos. Cada hombre deberá tener presente su número, para saber facilmente á que terna pertenece de las cuatro que entran en la *decuria*: el uno, el dos y el tres formarán la primera terna; el cuatro, el cinco y el seis la segunda; el siete, el ocho y el nueve la tercera, y el bice, el sixe y el diez, la cuarta.

Las formaciones de una terna no son mas que dos, una en fila y otra en hilera. Para facilitar los movimientos será indiferente que el primer hombre de una terna en fila esté á la derecha ó á la izquierda, y que el primero de la terna en hilera vaya delante ó detras, pero debe haber siempre uniformidad en las cuatro ternas.

Con este arreglo son seis las formaciones de una *decuria*, y se distinguen por su frente y por su fondo del modo siguiente.

Formaciones.	*Frente.*		*Fondo.*		
1.ª	1	hombre.	12	hombres,	como A.
2.ª	2	—	6	—	como B.
3.ª	3	—	4	—	como C.
4.ª	4	—	3	—	como D.
5.ª	6	—	2	—	como E.
6.ª	12	—	1	—	como F.

En las siguientes formaciones cada cifra corresponde al número de un hombre y el cero al diez.[11]

Siendo indiferente que la primera terna en fila forme delante ó detras, y que en hilera forme al costado derecho ó al izquierdo, será muy fácil pasar de cada formacion á cualquiera de las otras cinco, y por consiguiente formada la tropa á dos de fondo, no habrá necesidad de tomar distancias de filas ni de ninguna otra preparacion para formar á tres, á cuatro, á seis, lo que podrá hacerse tan prontamente, que bastará un cuarto de conversion de cada decuria ó de cada seccion (mitad de ella), y volverse cada hombre á la derecha ó á la izquierda segun convenga. De este modo quedará resuelta una de las cuestiones mas difíciles que se han presentado en la táctica militar.

Cada centuria ó compañía, constando de diez decurias, podrá formar tambien de seis modos; primera: por decurias ó sea con el frente de una; segunda: por sestas ó con el frente de dos decurias; tercera: por cuartas ó con el frente de tres decurias; cuarta: por tercias ó con el frente de cuatro decurias; quinta: por mitades, y sesta en batalla. Como cada una de estas seis formaciones de la centuria, puede ser con cualquiera de las seis de las decurias, se

[11] Esta figura trasladó a la página 6Ɛ. —Ed.

A	A
1	0
2	↋
3	↊
4	9
5	8
6	7
7	6
8	5
9	4
↊	3
↋	2
0	1

B	B
1 4	4 1
2 5	5 2
3 6	6 3
7 ↊	↊ 7
8 ↋	↋ 8
9 0	0 9

C	C	C	C
1 2 3	3 2 1	0 ↋ ↊	↊ ↋ 0
4 5 6	6 5 4	9 8 7	7 8 9
7 8 9	9 8 7	6 5 4	4 5 6
↊ ↋ 0	0 ↋ ↊	3 2 1	1 2 3

D	D	D	D
1 4 7 ↊	↊ 7 4 1	0 9 6 3	3 6 9 0
2 5 8 ↋	↋ 8 5 2	↋ 8 5 2	2 5 8 ↋
3 6 9 0	0 9 6 3	↊ 7 4 1	1 4 7 ↊

E	E	E	E
1 2 3 7 8 9	9 8 7 3 2 1	4 5 6 ↊ ↋ 0	0 ↋ ↊ 6 5 4
4 5 6 ↊ ↋ 0	0 ↋ ↊ 6 5 4	1 2 3 7 8 9	9 8 7 3 2 1

F	F
1 2 3 4 5 6 7 8 9 ↊ ↋ 0	0 ↋ ↊ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

sigue que son treinta (36 digital) las formaciones diferentes en batalla ó en coluna de una centuria.

Para la mayor facilidad y prontitud en las evoluciones de un regimiento, debe este dividirse en tres batallones, constando cada uno de cuatro compañías ó centurias á las órdenes de un comandante ó del mismo coronel, de modo que todo el regimiento constará de diez compañías.

Si siempre me ha llamado la atencion el arte militar, no me ha sucedido menos con la arquitectura, y no puedo prescindir de decir algo acerca de la aplicacion de la numeracion natural á este arte, que tambien es muy noble.

La columna con basa y capitel constará de cien partes (144 digital), que se repartirán del modo siguiente.

Basa	8	natural.	=	8	digital.
Fuste	↊0		=	120.	
Capitel	14		=	16.	
	100.			144.	

La basa es la decimasesta parte (18.ª digital) de toda la columna, y la decimatercia (15.ª digital) del fuste.

El capitel es la novena parte de toda la columna y la sétima y medía del fuste.

La basa es la mitad del capitel, y las dos cosas juntas componen la sesta parte de toda la columna.

El capital con el cordon que debe tener debajo, siendo este de un céntimo, compondran 15 que es esactamente la sétima parte del fuste sin dicho cordon.

Tambien podrán repartirse las cien partes de la columna de este otro modo.

Basa.........	9	natural.	=	9	digital.
Fuste........	99		=	117.	
Capitel......	16		=	18.	
	100.			144.	

La basa es la decimacuarta parte (16.ª digital) de toda la columna, y la decimaprimera (13.ª digital) del fuste.

El capitel es la octava parte de toda la columna y la sesta y $1/2$ del fuste.

La basa es la mitad del capitel, y ambas cosas juntas componen la quinta y $1/3$ ó sea $3/14$ natural de toda la columna.

Hallada una buena proporcion entre las medidas de alturas de las diferentes partes de la columna, no deberian variarse estas medidas en ninguno de los órdenes : esta proposicion no parecerá bien al principio, mas despues de ensayada, tal vez no se desaprueba. Los cinco órdenes se distinguirán por los adornos, por la mas ó menos tosquedad ó finura de las molduras de la basa y capitel y por el grueso de la columna, que en la parte mas baja ó imoescapo del fuste podrá tener de diámetro 14, 15, 16, 17 ó 18 céntimos naturales segun el órden de arquitectura.

En todos los órdenes la altura del entablamento es la cuarta parte de la altura de toda la columna, luego teniendo esta cien partes, deberán ser treinta las de aquella.

El entablamento hace mejor efecto cuando el arquitrabe, el friso y la cornisa son progresivamente mayores, y esta progresion no debe ser sino la de los números 3, 4 y 5 que suman diez (12 digital). Dividido, pues, el entablamento en diez partes, será cada una de tres céntimos: luego en todos los órdenes deberia tener el arquitrabe nueve céntimos, el friso diez, y la cornisa trece (15 digital), cuyos números siguen proporcionalmente la progresion de 3, 4 y 5.

La cornisa consta de tres partes principales, queson: pie, corona y remate. Las alturas de estas tres cosas hacen mejor efecto, siguiendo tambien proporcionalmente la progresion de 3, 4 y 5, pero en órden inverso. Constando, pues, la cornisa de 13 céntimos, será de $1\,1/4$ cada parte de las diez en que se divida, y por consiguiente corresponderán $6\,1/4$ al pie, que se compone de las molduras que sirven de apoyo á la corona; 5 á esta, comprendiendo los modillones, cuando deba tenerlos, y 3 $3/4$ el remate cuyas molduras no son otra cosa que un adorno de la corona; porque sin ellas quedaria desairada esta y deslucida toda la cornisa.

Si se logra una buena proporcion en las medidas de las partes principales del entablamento, deben ser comunes estas medidas á los cinco órdenes, distinguiéndose estos por la mayor ó menor elegancia en los adornos y molduras, que corresponderán á los de la basa y capitel de la columna y al grueso de esta, todo lo cual debe dejarse al talento y buen gusto del arquitecto; que no debe perder de vista el uso ú objeto á que se destina la obra.

Capitulo XVII

Modo de establecer la numeracion natural.

Los buenos aritméticos y aun los medianos harán operaciones aritméticas con cualquiera numeracion, luego que conozcan sus bases generativa y espositiva y sus tablas de sumar y multiplicar, y por consiguiente nada mas se necesita para que se establezca entre ellos la numeracion natural. Mas en mi concepto no puede generalizarse, sino en el trascurso de algunos años, y procediendo del modo siguiente. Hágase una reforma general de medidas, pesos, monedas &c., procurando que todo se divida y subdivida por doce. Este arreglo es decimal segun la numeracion natural, y así deberá practicarse por los profesores de fisica y matemáticas, hablando cientificamente, y es duodecimal segun la digital, que deberá continuar en el pueblo hasta que dicha reforma esté bien radicada y practicada. Entonces podrá vulgarizarse la clasificacíon de los números en primos, binarios, ternarios &c. y la armonía y correspondencia que hay entre ellos, repitiéndose del mismo modo en cada doce. Así se conseguirá que aun los mas ignorantes se penetren de lo importante que seria, que el número diez tuviese las propiedades del doce ó que el doce fuese diez, y por lo tanto será bien recibida la ley, para que en todas las escuelas se enseñe la numeracion natural, y sea esta unicamente la que se use en todo escrito público.

En los *dedos* de cada mano tenemos la *base* de la numeracion natural, y de ellos debemos valernos para enseñarla al vulgo con mas facilidad, cuando sea tiempo. El dedo pulgar está naturalmente colocado para señalar cada uno de los artejos que hay en los otros cuatro dedos; y procediendo en cada uno de estos de la raiz hácia la estremidad, se enseñará que si son de la mano izquierda, deberá decirse *uno*, *dos*, *tres*, señalando los artejos del dedo meñique; *cuatro*, *cinco*, *seis* en los del anular; *siete*, *ocho*, *nueve* en los del mayor; *bice*, *sixe*, y *diez* en los del índice: si son de la mano derecha se dirá: *diez*, *veinte*, *treinta* en los artejos del dedo meñique; *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta* en los del anular; *setenta*, *ochenta*, *noventa* en los del mayor; *bicenta*, *sixenta*, *ciento* en los el índice.

La reforma que he indicado de medidas, pesos, &c. es la siguiente:

division de la circunferencia del círculo.

Los mas antiguos geómetras la hicieron constar de 360 grados, cuya cuarta parte es 90, y los franceses para arreglar las medidas por decimales, le dieron 400, á fin de que el cuadrante fuese de 100. Mas para hallar el número de grados que debe preferirse, ha de tenerse presente que serán mas pequeños segun sea mayor el número de ellos, y podrá determinarse con mas exactitud el grado terrestre; pero no deben ser tan pequeños, que no puedan señalarse uno por uno con toda claridad en los arcos y círculos graduados de los instrumentos físicos y matemáticos de un tamaño regular y cómodo. Tambien debe tenerse presente que la mayor parte de las partes alicuotas del número que se prefiera, han de ser números mistos, que son los mas importantes, y no dejaria de ser conveniente que una de ellas fuese el 8, siendo este el número de los rumbos ó vientos de cada cuadrante de la brújula. Todas estas condiciones las reune el número 576, cuya cuarta parte es 144. Dividida, pues, la circunferencia del círculo en 576 grados, entrarán 8 de estos en 5 de los actuales. Este número 576 de la numeracion digital es el 400 de la natural; luego en cualquier tiempo que esta se adopte, con la nueva division de la circunferencia tendrá el cuadrante 100 grados, que es lo que tanto se desea. A todo esto se egrega, que entre las once partes alicuotas de 90 ni entre las ocho de 100 no hay ningun número traternario ni el ocho, mientras que entre las catorce de 144 (100 natural) hay cinco números traternarios y el ocho.

DEL METRO Ó MEDIDA FUNDAMENTAL.

Dividido el cuadrante del meridiano terrestre en diez millones de partes, vino á ser cada una de 43,0:670.592 pulgadas españolas, constando dicho cuadrante de 35:889.216 pies españoles: y como el número 10:000.000 de la numeracion natural es 35:831.808 de la digital, se sigue que dividido dicho cuadrante en diez millones de partes segun la numeracion natural, será cada una de estas el mismo pie español con el pequeñisimo aumento de $2\,{}^{83}/_{108}$ (2,928) natural puntos. Esta diez millonésima parte (segun la numeracion natural) de la distancia del polo al ecuador será el metro ó medida fundamental, que llamarémos pie, y se subdividirá del modo siguiente segun la numeracion digital.

Pie.	*Pulgadas.*	*Líneas.*	*Puntos.*
1	12	144	1.728.
	1	12	144.
		1	12.

Esta subdivisíon segun la numeracion natural es como sigue:

Pie.	*Pulgadas.*	*Líneas.*	*Puntos.*
1	10	100	1.000
	1	10	100.
		1	10.

Aunque todas las medidas comunes lineales debieran espresarse en pies, no es necesario que estos se verifiquen uno por uno, pudiendo hacerse de tres en tres por medio de la vara ó tripié.

MEDIDAS ITINERARIAS.

Teniendo ahora el cuadrante 90 grados, y considerando cada uno de 20 leguas, son 1.800 de estas las que entran en el cuadrante del meridiano terrestre; pero si se divide en 144 grados y cada grado en doce leguas, serán 1.728 de estas las que entren en dicho cuadrante mácsimo: luego veinte y cinco de aquellas leguas compondrán veinte y cuatro como la que se propone cuya subdivision será la siguiente:

Legua.	*Millas.*	*Cordeles.*	*Toesas.*	*Pies.*
1	12	144	1.728	20.736.
	1	12	144	1.728.
		1	12	144.
			1	12.

Esta subdivisíon segun la numeracion natural es como sigue:

Legua.	*Millas.*	*Cordeles.*	*Toesas.*	*Pies.*
1	10	100	1.000	10.000.
	1	10	100	1.000.
		1	10	100.
			1	10.

MEDIDAS DE SUPERFICIE Ó DE TERRENOS.

Segun el sistema duodecimal de la numeracion digital deberán ser las siguientes:

Fanegada ó milla cuadrada.	*Aranzadas ó cordeles cuadrados.*	*Estadales ó toesas cuadrados.*	*Aras ó pies cuadrados.*
1	144	20.736	2:985.984.
	1	144	20.736.
		1	144.

Esta subdivision segun la numeracion natural es como sigue:

Fanegada ó milla cuadrada.	*Aranzadas ó cordeles cuadrados.*	*Estadales ó toesas cuadrados.*	*Aras ó pies cuadrados.*
1	100	10.000	1:000.000.
	1	100	10.000.
		1	100.

MEDIDAS DE SÓLIDOS Ó DE CAPACIDAD.

Entendiéndose por *cubo* un pie cúbico, podrán determinarse y subdividirse las demas medidas de capacidad segun la numeracíon digital del modo siguiente:

Tonelada.	*Cajas.*	*Cubos.*	*Potes.*	*Litros.*
1	12	144	1.728	20.736.
	1	12	144	1.728.
		1	12	144.
			1	12.

Establecida la numeracion natural, en que estos números son decimales, podrá subdividirse el litro en *decilitros* ó pulgadas cúbicas, *centilitros* y *militros.*

PESOS.

Determinado el peso que deba llamarse *onza*, sea el de una pulgada cúbica de agua destilada ó cualquier otro, podrán determinarse y subdividirse los demas del modo siguiente:

Quintal.	*Arrobas.*	*Libras.*	*Onzas.*	*Gramas.*
1	12	144	1.728	20.736.
	1	12	144	1.728.
		1	12	144.
			1	12.

Establecida la numeracíon natural, en que estos números son decimales, podrá subdividirse el grama en *decigramas*, *centigramas* y *miligramas.*

MONEDAS.

Un peso fuerte que deberá ser una onza de plata acuñada, se dividirá en 12 reales ó monedas de un grama de plata y en 144 avos; de modo que estos vendrán á ser céntimos, si se establece la numeracion natural, y aquellos 12 reales serán 10.

MEDIDAS DE TIEMPO.

La division del dia natural deberia corresponder en algun modo á la del ecuador, lo que puede conseguirse haciendo que cada hora conste de 24 partes ó grados: luego el dia natural constaria de 576 grados, que son los mismos que deberia tener el ecuador segun esta reforma.

Por consiguiente establecida la numeracion natural, tendrá el dia 20 horas y cada hora 20 grados; luego serán 400 los grados del dia natural y los del ecuador, y los minutos, segundos, terceros &c. de hora corresponderán á los del ecuador, siendo una misma la subdivision de unos y otros. Así nos ahorraríamos las reducciones de medidas de tiempo á medidas del ecuador y al contrario.

DE LA SEMANA.

Los franceses quisieron que la semana constase de diez dias; pero, como ha demostrado Chateaubriand (Genio del Cristianismo), es muy natural y conveniente que haya *seis* dias de trabajo y uno de descanso.

DEL COMPUTO LUNAR.

Una lunacion consta de 29 dias, 12 horas y 44 minutos. Las 12 horas componen un dia en cada dos lunaciones: luego la primera y todas las que formen con sus anteriores un número impar serán de 29 dias, y de 30 las que formen un número par. Los 44 minutos componen

22 horas al cabo de 30 lunaciones, que es lo que se llamará *ciclo lunar*: supóngase que son 24 horas, y auméntese un dia á cada ciclo en la penúltima lunacion, que debiendo tener 29 dias por ser impar, tendrá 30, de modo que al fin de cada ciclo habrá tres seguidas de 30 dias. Pero las dos horas que se aumentan para completar quellas 24, componen un dia al cabo de 12 ciclos, que es lo que llamarémos *período lunar*: luego en cada cicle duodécimo la penúltima lunacion constará solo de 29 dias como las demas de número impar.

El ciclo lunar constará de 30 lunaciones, que contienen 886 dias, menos en el ciclo duodécimo que solo serán 885.

El período lunar tendrá 12 ciclos, que son 360 lunaciones con 10.631 dias.

Es aquí muy digno de notarse, que si una lunnacion constaba ántes del diluvio de 30 dias cabales y el año de 12 lunaciones ó 360 dias; así ahora el ciclo lunar que he esplicado, consta naturalmente de 30 lunaciones y el período lunar de 12 ciclos ó 360 lunaciones; de suerte que si el año tuviese ahora 360 dias, los 10.631 que componen dicho período lunar terminarian á los 29 años y 191 dias; así como el mes lunar consta ahora de $29\,{}^{191}/_{360}$ dias.

Dicho computo lunar espresado segun la numeracion natural, es como sigue: las lunaciones de número impar tendrán 25 dias y las de núd mero par 26.

El ciclo lunar tendrá 26 lunaciones que hacen 61↊ dias; menos el décimo ciclo que solo tendrá 619 dias.

El período lunar constará de 10 ciclos, que son 260 lunaciones con 6.19↋ dias.

DEL AÑO Y DEL COMPUTO SOLAR.

Si despues de establecida la numeracion natural, continua el año con el mismo número de meses, el último se llamará *diciembre* con toda propiedad, y sucediera lo mismo con los demas, cuyos nombres se derivan de números, si al mes de junio siguieran setiembre, octubre, noviembre, julio, agosto y diciembre.

En la mas remota antigüedad, y tambien ántes del diluvio universal, constaba el año de 12 lunaciones; pero el de Rómulo, ó sea el primero que tuvieron los romanos, era solo de diez, por que faltaban enero y febrero, y de aquí viene que los cuatro últimos se llamen setiembre, octubre, noviembre y diciembre.

Segun se iba conociendo la revolucion del sol, se procuraba ajustar á ella la duracion del año en casi todas las naciones. Por las últimas observaciones se ha encontrado que dicha revolucion es de 52 semanas, 1 dia, 5 horas, 49 minutos y 12 segundos. Prescindiendo de las lunaciones y de los meses, y atendiendo solo á la division natural del año en 52 semanas y 1 dia, podrá este llamarse final ó de complemento ó de accion de gracias; y no contándolo entre los de la semana, se llamaria siempre domingo el primer dia del año, lo cual no se opone al precepto de trabajar seis dias y descansar el sétimo. Los de cada semana deberian tener el número de ella, de modo que los de la primera deberian llamarse domingo 1.º , lúnes 1.º , mártes 1.º … Los de la segunda, domingo 2.º , lúnes 2.º , mártes 2.º &c. Con este arreglo serian fijas las semanas, quiero decir, se repetirian del mismo modo en todos los años, no habria necesidad de las letras *dominicales* ni *feriales*, y las fechas sin mas palabras que ahora (por ejemplo: viérnes 43 de 1845) espresarian el dia del año y el de la semana, que alguna vez no deja de ser importante.

Pero no hemos hecho cuenta de las 5 horas, 49 minutos y 12 segundos. Como solo faltan 10 minutos y 48 segundos para las seis horas, supóngase que estan cabales y resultará un dia mas cada cuatro años: luego cada año cuarto ó llámese bisiesto constará de 52 semanas y 2 dias finales ó de complemento.

Los 10 minutos y 48 segundos que se han aumentado á cada año para completar las seis horas, se quitarán del modo siguiente: los 10 minutos componen exactamente un día al cabo de 144 años (100 natural): luego á cada año último de este período se le quitará el dia que debiera aumentársele como año bisiesto, quedando como los comunes de 52 semanas y 1 dia. Los 48 segundos componen un dia al cabo de 1.800 años: luego al último de este *período solar* no solo se le quitará el día que debiera aumentársele como año bisiesto, sino tambien el que debiera tener como año comun, quedando de 52 semanas cabales.

Este computo espresado segun la numeracion natural, es como sigue.

Un año tendrá 44 semanas y 1 dia que son 265 dias (365 digital). Si se divide el año en 11 partes ó meses (13 digital) terminarán con las semanas 4, 8, 10; 14, 18, 20; 24, 28, 30, &c. Si se divide en cuatro partes, termina la primera con la semana 11; la segunda con la semana 22; la tercera con la semana 33 y la cuarta con la semana 44.

Un lustro será de 4 años y 1 dia, que se aumenta al cuarto ó bisiesto, el cual será por esta razon de 44 semanas y 2 dias: luego los años bisiestos serán el 4, el 8 y el 10 de cada decena, como 14, 18, 20; 24, 28, 30 &c.

Un siglo constará de 30 lustros ó 100 años (144 digital) menos un dia que debe quitarse al año 100.

Un *período solar* constará de 1.000 años (1.728 digital), el último de los cuales tendrá 44 semanas justas.

Capitulo XVIII

Dificultades que pueden presentarse para el establecimiento de la numeracion natural.

«El hombre es tan pronto á imaginar proyectos, como lento y débil para efectuarlos. Todo lo halla fácil en su gabinete, cómodo en su pensamiento, todo se combina con los principios mas sólidos; parece que no hay mas que poner mano á la obra para acertar. Platon y Morus concibieron prontamente el plan de la forma del gobierno mas perfecto y feliz para la humanidad. Leibnitz el de una lengua universal. De-Lanis no hallaba nada mas fácil que la ejecucion de una nave aérea. Sin embargo todos estos hermosos proyectos y otros muchos semejantes no existen sino en el papel.”

Estas palabras de un enciclopedista pueden tal vez aplicarse al proyecto de establecer la importante numeracion natural, y desanimar á los literatos que no profesan las matemáticas; pero que pudieran sin embargo tener una gran parte en llevar al cabo tan árdua empresa.

Nótese bien que nuestro proyecto no es el de disponer ó hallar la numeracion mas ventajosa y perfecta, porque ya la hemos dispuesto y ejecutado, sino el de establecerla.

La natural clasificacion de las ideas, cuyo conocimiento (que aun no tenemos) ser ha llamado gramática general, ideología y gramática natural, no es obra del hombre, sino que existe en sí misma; es un sistema sencillo, claro, armonioso, perfecto, al fin natural, como sucede con el de la clasificacion de los números. Cuando aquel se descubra perfectamente, no será imposible ni aun difícil la escritura que se lea en todas lenguas, ni la lengua que con poco trabajo pudiera hacerse universal. Estas dos cosas no pueden causar ningun trastorno, ni se oponen á intereses particulares. Si alguno las presenta ya dispuestas y bien ensayadas, se admitirán con tanta prontitud, que no tendrá tiempo la envidia para asestar sus tiros contra el autor. Mientras no se tenga la ciencia necesaria para llevar al cabo un proyecto, quedará solo en el papel, y al contrario, todo lo que es natural ó se funda en una verdadera ciencia, se establecerá al fin, por mas oposicion que haya.

El plan de la forma del gobierno mas perfecto y feliz para la humanidad, ó mejor diré, la constitucion natural de la sociedad humana es un sistema que ya está dispuesto y existe en sí mismo. Esta es la constitucion que desean los hombres de buena fe, completamente despreccupados de todo espíritu de soberbia y de avaricia; empero es necesario quese convenzan de que no la han de disponer sino buscar. El proyecto de establecerla (cuando se encuentre) parecerá temerario, porque será tan fuerte la oposicion, que podrá compararse á un rio caudaloso que se arroje sobre ella para anegarla; pero es natural, será ya conocida y por lo tanto una verdadera ciencia, y no habrá remedio, se establecerá, y será permanente y universal; porque, como ha dicho M. de Corde, «está en la a naturaleza de lo que es bueno y verdadero, estenderse y marchar á la universalidad. El error, al contrario, no pertenece sino á ciertos tiempos ó á ciertos lugares, y marcha siempre por su misma naturaleza á su resolucion, á la nada;... la verdad prevalece sucesivamente sobre todas las mentiras, y el imperio que ella obtiene es *indestructible*.”

La numeracion natural ya sea con los signos que he presentado ó con otros, fundándose en el sistema natural de los números, que siendo ya conocido es una verdadera ciencia, se establecerá necesariamente. No puede ser tan bien recibida como una escritura ó lengua universal, para cuyo establecimiento no hay necesidad de tocar nada de lo establecido; mas tampoco habrá una oposicion tan fuerte como para la constitucion natural, porque nada tiene que ver el cambio de numeracion con las ambiciones ni con las demas pasiones de los hombres. Las dificultades que se presenten serán en cuanto á la utilidad ó conveniencia y en cuanto al modo de hacer este cambio. Si se observa el método que he presentado en el capítulo anterior con las modificaciones que tengan á bien los inteligentes, no habrá dificultad en cuanto al modo; pero ántes deben allanarse las que se presenten en cuanto á la conveniencia, á las cuales he dedicado este capítulo.

« Donde quiera que haya hombres en sociedad, *se me podrá decir*, espresarán los números con los dedos de ambas manos, ó su numeracion verbal tendrá por fundamento el número de estos dedos. Los sabios de todas las naciones y de todos los siglos han adoptado la numeracion digital, sin que á nadie le haya ocurrido hasta ahora ni aun remotamente que deba desecharse, por ser la que en todas partes inventa siempre el hombre inculto; al contrario, esta conformidad universal entre hombres que ademas de su rusticidad no han podido comunicarse, es una prueba incontrastable de que la numeracion digital es la natural. Segun ella fué que Adan espresó los números: si Dios le prescribió ó inspiró las palabras con que debia nombrar las cosas, fué sin duda el mismo Dios quien estableció la numeracion digital. Si se pretende con algunos sabios, que, dotado el hombre de inteligencia y de la facultad de variar y modificar muy facilmente los sonidos de su voz, para formar con ella signos de las ideas, quiso Dios que eligiese él estos signos á su voluntad, como parece que debe deducirse de ela presentacion de todos los animales á Adan, para que diese á cada uno su nombre (*ut videret quid vocaret ea. . .* Génesis cap. 2 v. 19); aun así no podrá negarse que el mismo Dios ha establecido la numeracion digital; porque dispuso que fuese natural al hombre espresar los números con los dedos, teniendo de este modo en las manos la base para numerar los productos del trabajo de ellas mismas, y por consiguiente al fijar el número de los dedos, quiso que fuese este número la base de la ąhumeracion verbal. El mas torpe de los hombres en caso necesario y sin que nadie le enseñe, sabrá espresar los números con los dedos, y aun sacará aquellas cuentas mas sencillas y comunes que pueden ofrecersele en el trato social. Y esta numeracion que dispone en todas partes el hombre rústico, que tiene la sancion de todos los sabios antiguos y modernos, que Dios estableció, ¿no será natural? ¿no será la mas conveniente? ¿podrá ser derogada?”

Este argumento hubiera parecido á todos irresistible ántes de ser conocido el sistema natural de los números; mas ahora parecerá débil á unos y no dejará de tener alguna fuerza en el concepto de otros, por lo cual y porque su resolucion puede servir de ilustracion á un gran pensamiento (la venida del Mesías en gloria y magestad por el P. Lacumsa, jesuita, bajo el nombre de Josafat Ben-Ezra) me parece conveniente no omitirla.

El uso ó destino principal de las manos del hombre es procurar *materialmente* las cosas necesarias á la subsistencia, abrigo, comodidades y defensa del cuerpo, y la forma que Dios les ha dado, es la mas conveniente á este destino. Ellas suplen la vista en los ciegos; pero solo para las cosas en que mas se han ejercitado y de un modo muy imperfecto, porque no es este su destino. Tambien suplen en los mudos los signos vocales con que ąse deben espresar los pensamientos; pero tan imperfectamente, que aunque sus movimientos y señales vayan acompañados de gestos, miradas é interjecciones, siempre tiene mucho que suplir y deducir el que atiende. Este lenguaje pantomímico es ademas muy limitado y detenido, cuando el pensamiento es veloz y variados in limitacion. Es necesario pues, que el hombre elija á su voluntad los signos que representen sus ideas, y por consiguiente debe tener á su disposicion elementos fáciles y prontos de que formar estos signos, como son las variaciones y modificaciones de la voz, siendo esta y no las manos lo que está destinado en el hombre para espresar comodamente sus pensamientos. Si las palabras van acompañadas de indicaciones *materiales* hechas con las manos, los ojos ó el gesto, será mas fuerte, mas enérgica la espresion, por cuanto es doble; pero no porque falte este *segundo acto*, será defectuosa la espresion vocal.

Dios hizo ostentacion de haber creado un ente capaz de dar nombre á las cosas, al presentar á Adan todos los animales, para que empezase á hacer uso del don con que mas lo habia privilegiado sobre todos los demas seres. Es necesario, pues, que se presenten al hombre las cosas, y que él las perciba, para que pueda nombrarlas. Si hubiera sabido Adan que en los números habia un sistema natural, hubiera dispuesto la numeracion verbal segun este sistema. Mas parece que Dios tenia dispuesto no comunicarle las ciencias sino en premio de su fidelidad, y he aquí porque tenemos que trabajar para adquirirlas, y tanto que despues de millares de años aun no hemos descubierto la perfeccion de ninguna. De la sabiduría concedida á Salomon solo nos han quedado algunas máximas civiles, morales y religiosas.

De todo lo dicho se deduce que no fué Dios quien dispuso la numeracion digital.

Supuesto que las manos no son para ver ni para hablar, se sigue que, aunque sea tan natural al hombre *suplir* con ellas un poco la falta de la vista y de las palabras, no es natural, ni propio ni cómodo este modo de ver y de hablar: luego la numeracion digital, que proviene del lenguaje pantomímico, no es la natural ni la mas conveniente.

Dando Dios á la mano la forma que mas conviene á su destino, quiso tambien que no faltase en ella el número doce, en que consistela perfeccion de toda la naturaleza; por lo cual se halla en la música, y se hallaba en el cielo ántes del diluvio á la vista de los hombres, entrando *doce* lunaciones justas en una revolucion del sol, como voy a demostrar.

«Cada lunacion ántes del diluvio era de 30 dias cabales, y el año lunar y el solar eran uno mismo, que constaba de 360 dias.” Esta pensamiento es de Guillermo Whiston, en su teórica de la tierra impresa en Londres el año de 1798; pero á este autor no le ocurrió que el ecuador y la elíptica estuviesen en un mismo plano, sin lo cual no es probable su pensamiento; ni este ha ocurrido á otros que casi han demostrado la coincidencia de dichos círculos ántes del diluvio; de modo que (hablando en términos copernicanos) la tierra tenia un movimiento sobre su eje y otro al rededor del sol, ambos de occidente á oriente lo mismo que ahora; pero la equinoccial, á cuyo círculo es paralelo el movimiento de rotacion, no está ahora como entonces en el mismo plano de la eclíptica, que es el círculo ó elipse que describe la tierra al rededor del sol. En los polos no habia noche, porque este astro se mantenia constantemente en el horizonte racional de ellos, que es el mismo plano equinoccial. En cualquier otro punto de la tierra el dia natural (desde que sale el sol hasta que vuelve á salir, ó desde que deja un meridiano hasta que llega otra vez á él) era perfectamente igual en todo el año: la mitad justa de este tiempo estaba el sol sobre el horizonte y la otra mitad debajo: un buen reloj hubiera ido siempre exactamente con este astro. Ahora no es así: estando el sol en la equinoccial, son los dias naturales mas largos, y en los trópicos los mas cortos del año; por consiguiente las horas son tambien desiguales en la misma proporcion de los dias, y un buen reloj no puede ir exactamente con el sol, sino arreglándolo á menudo, por un vicio en el movimiento actual de la tierra, que seguramente no lo tenia en su creacion.

Estando el ecuador en el mismo plano de la eclíptica, no solo son los dias perfectamente iguales en todo el año, sino que tambien son mas largos que el mas largo de ahora. Si consideramos la tierra fija en un punto con solo el movimiento de rotacion, estará el sol al fin de cada vuelta en el mismo meridiano que al principio; pero si ademas del movimiento de rotacion tiene otro tambien hacia el oriente al rededor del sol, no estará este astro en el mismo meridiano al fin de cada vuelta de la tierra sobre su eje, sino algun tiempo despues de empezada otra. De modo que habiéndose dividido el dia natural en 24 horas, concluye la tierra una rotacion en 23 horas, 56 minutos y 4 segundos, teniendo que andar aun 3 minutos y 56 segundos para completar el dia natural, esto es, para que el sol vuelva á encontrar el mismo meridiano. Dicha diferencia seria mayor ó menor segun distare mas ó menos de 90 grados el ángulo formado por la eclíptica con el eje de la tierra: luego estando este círculo en el mismo plano equinoccial que es perpendicular al eje, como se ha creido que estaba ántes del diluvio; los dias eran mas largos que los mas largos de ahora y siempre iguales. Luego aunque el año fuese entonces el mismo que ahora, en cuanto á que la tierra empleaba el mismo tiempo en hacer su revolucion al rededor del sol, no es de estrañar que este tiempo, el año, constase entónces de 360 dias, teniendo ahora algo mas de 365.

La tierra en su movimiento periódico es acompañada de la luna, y este satélite se mueve ademas al rededor de la tierra, concluyendo esta revolucion en 27 dias, 7 horas y 43 minutos; pero tiene que andar aun 2 dias, 5 horas y 1 minuto para volver á pasar un meridiano al mismo tiempo que el sol; de modo que una lunacion ó lo que va de una conjuncion á otra consta de 29 dias, 12 horas y 44 minutos. Por las mismas razones del párrafo anterior acerca del dia antidiluviano se prueba tambien, que si el movimiento periódico de la tierra fuera en el plano de la equinoccial, tendria que andar la luna algunas horas mas para alcanzar al sol, y completaria 30 dias antidiluvianos de una conjuncion á otra.

La proposicion de Whiston se prueba con la sagrada Escritura dei modo siguiente.

No puede dudarse que Moises en la narracion del diluvio cuenta los dias del mes como los contaba Noé.

Dice, pues, Moises que el movimiento de las aguas yendo y volviendo para menguarse, duró hasta el mes décimo. (*At vero aquæ* ibant *et decrescebant usque ad decimum mensem.* Génesis cap. 8, ver. 5), en cuyo dia primero aparecieron las cumbres de los montes. Despues de este mes décimo, y por consiguiente desde el primero del undécimo, pasados cuarenta dias, abriendo Noé la ventana del arca, soltó el cuervo, que no volvió; despues de él soltó la paloma, que no halló donde poner su pie, y se volvió al arca: habiendo esperado *otros* siete dias (*septem diebus* aliis, vers. 10.) envió de nuevo la paloma. La palabra *otros* (aliis) espresa bastantemente que fueron siete los dias que mediaron entre la salida del cuervo y la primera de la paloma. En la segunda volvió esta con un ramo de olivo, con lo que entendió Noé que habian cesado las aguas sobre la tierra, y esto no obstante esperó otros siete dias y dejó ir la paloma que no volvió mas. Asi que el año 601 el primer dia del mes primero se habia secado la superficie de la tierra. En esta relacion hallamos que desde el dia primero del mes undécimo hasta el primero del año siguiente inclusives se cuentan 61 dias (40 y tres veces siete): luego rebajando el primero del año 601 de Noé, se sigue que cada mes era de 30 dias.

Aunque esta prueba basta para mi intento, no puedo menos de presentar aquí la historia del diluvio como la he entendido, por no haberla encontrado así en níngun autor.

Desde el dia 1.º del año 600 vida de Noé hasta el amanecer del 17 del 2.º mes que empezó á llover, van	46	dias.
Las aguas cubrieron la tierra sin menguar 150 dias, que se cumplieron al amanecer el 17 del mes sétimo	150	»
Desde dicho 17 inclusive, en que empezó el movimiento de las aguas para menguar mas pronto, hasta fin del décimo mes en que cesó este movimiento, por ser ya muy poca la que cubría la superficie de la tierra	104	»
Dos meses, el 11.º y el 12.º , que se necesitaron para a evaporarse las aguas que quedaron sin movimiento sobre la superficie de la tierra.	60	»
	360	dias.

Supuesto que llovió 40 dias y 40 noches, cesó la lluvia al amanecer el 27 del mes tercero del año; si desde este dia se empezaran á contar los 150 que las aguas cubrieron la tierra sin menguar, se concluirian al amanecer el 27 del mes octavo, lo que no se conforma con haber descansado el arca el 27 del mes *sétímo* sobre los montes de Armenia: luego los 40 dias que llovió sin cesar, deben comprenderse en los 150.

El sol y la luna en su creacion fueron destinados para medir el tiempo (Génesis cap. 1. ver. 14). El mes era una lunacion, supuesto que el mes tomó de la luna (Ecco. cap. 43, ver. 8): luego una lunacion segun la historia del deliuvio era ántes de 30 dias, y una revolucion del sol ó sea de la tierra era de 12 lunaciones ó 360 dias, lo que no puede ser sino estando la quinoccial y la eclíptica en un mismo plano (que es lo natural, como parece de la disminucion continua, aunque muy lenta del ángulo que forman estos dos círculos) en cuyo caso los dias son siempre iguales y mayores que el mayor de ahora.

Supuesto que 360 dias son 51 semanas y 3 dias, y que estos 3 dias componen 3 semanas al cabo de 7 años, se sigue que antes del diluvio en cada período de 7 años volvian á empezar estos con los mismos dias de la semana, y por consiguiente era natural la semana de años, y lo será siempre que vuelva la tierra á su natural posicion.

La eclíptica no se ha apartado del ecuador, sino el ecuador de la eclíptica; me esplicaré: la línea que ahora describe la tierra al rededor del sol (hipótesis de Copérnico) es la misma y se concluye en el mismo tiempo que ántes del diluvio; la posicion del plano de la eclíptica respecto del sol es ahora la misma que al principio: no así la del ecuador; pues habiéndose inclinado el eje de la tierra cuando el diluvio, forzosamente la equinoccial que se hallaba en el mismo plano de la eclíptica, debió apartarse tanto cuanto el eje de la tierra se apartó de la perpendicular á este plano.

De esta nueva posicion del ecuador, y siendo al oriente los movimientos de rotacion y periódico de la tierra, se sigue ique los dias naturales son mas cortos que ántes del diluvio, por lo cual, aunque la tierra emplea siempre *el mismo tiempo* en cada revolucion periódica, constaba esta entónces de 360 dias cabales, siendo ahora de 365 y algo mas.

Otra prueba de que los meses antidiluvianos eran lunares, es que despues continuaron los hombres contando 12 lunaciones en cada año. Este era el de los judíos, y es todavía entre los chinos, árabes, turcos &c.; pero fué necesario reformarlo, porque se notó que ya las lunaciones no eran de 30 dias como ántes del diluvio. Si entónces hubieran sido como ahora, sin duda lo hubieran advertido unos hombres que vivian 800 años.

Para que la tierra vuelva á su primitiva y natural posicion, bien se necesita el horrible movimiento, cual no lo hubo jamas, que está anunciado en la Escritura sagrada; apareciendo en seguida los cielos nuevos y tierra nueva, que dijo san Pedro (epístola 2.ª , cap. 3, ver. 13); porque el sol no se apartará mas de la equinoccial, y la posicion de todos los astros respecto de la tierra será diferente de la actual. En los polos jamas habrá noche, y en lo restanto serán los dias perfectamente iguales en todo el año: quizá hasta entónces no conocerán los hombres el perfecto gobierno (*Dios levantará á su tiempo á quien gobierne la tierra utilmente*. Ecco. cap. 10, vers. 4), ni la perfeccion de todas las ciencias: el leon y la oveja pacerán juntos: la vida regular del hombre que ahora es de 60 á 84 años, cuyo término medio es 72 (60 natural mitad de 100), será entónces como ántes del diluvio de 800 á 950 (sobre 600 natural mitad de 1000). Tal será la bondad de toda la naturaleza, cuando la revolucion periódica del sol ó sea de la tierra vuelva á constar de *doce* lunaciones. ¿ Será mas conveniente la numeracion que se funda en el número de los dedos, que la que tiene por base el número en que consiste la perfeccion de toda la naturaleza? ¿ Será posible que los hombres ilustrados que han llegado á poseer la ciencia de las propiedades esenciales de los números, continuen con la numeracion que disponen los salvajes?

Tal vez se alegará que no debe abandonarse la numeracion, segun la cual estan espresados los números de todas las tablas científicas, de todos los instrumentos graduados y de toda la historia sagrada y profana; pero esta dificultad no es tan árdua como parece, porque muy poco ó nada tiene que ver el vulgo con la historia, ni con los instrumentos ó tablas científicas, miéntras que para los inteligentes, siendo la numeracion natural la que se establezca, es mas fácil segun esta la construccion de las tablas, mas cómodo el uso de ellas y de los instrumentos graduados, y á los números espresados en la historia segun la numeracion digital, puede señalarse facilmente su correspondencia con la natural.

Capitulo XIX

De la necesidad de establecer la numeracion natural.

Desde el siglo pasado han convenido los sabios en que es indispensable una reforma universal: al intento ha habido ya en Paris una asamblea, por la cual se inventaron las medidas decimales del cuadrante del meridiano terrestre. Empero no es posible que se haga esta gran reforma de un modo invariable, si no se establece la numeracion natural, con la cual unicamente se conseguiria un órden ó sistema fácil y perfecto en todo cuanto tenga relacion con los números.

La division y subdivision de las medidas, pesos &c. de diez en diez nos ofrece tres grandes utilidades, en cuanto se adopte por todaslas naciones cultas; primera: la uniformidad, que nos ahorraria el fastidio de tantas reducciones; segunda: una gran facilidad en las operaciones de números denominados, á causa de las propiedades de los quebrados decimales que no tienen los demas; y tercera: la fácil instruccion del pueblo, pues sabiendo que todo se divide en diez, solo necesitará aprender los nombres que deberán ser los mismos que siempre se han usado ú otros muy conocidos, y no palabras griegas ni latinas, que aunque fueran útiles á los literatos, harian difícil y quizá impenetrable á los pueblos un órden tan sencillo.

Pero hemos descubierto que cualquier número puede ser diez, y tener con sus potencias las propiedades decimales, siempre que se elija por base de la numeracion; luego está ya en nuestra facultad preferir el mas importante.

El que hasta ahora hemos llamado diez, formando la base de la numeracion, no se divide por tres, ni por cuatro y su mitad es un número simple ademas de ser impar, miéntras que el que llamamos doce tiene entre sus partes alicuotas un biternario, un tetráctico, un ternario, un binario y un primo que es la unidad.

Si no puede negarse que el arreglo de pesos y medidas por decimales es el mas ventajoso, cualquiera que sea el número que se llame diez, y si los decimales de la numeracion natural nos ofrecen utilidades y ventajas importantísimas sobre los de toda otra numeracion, se sigue que no se podrá conseguir la mas conveniente reforma, y por consiguiente no será esta invariable, miéntras no se establezca la numeracion natural, llamándose diez el número que ahora es doce.

La naturaleza que es inmutable, porque no es otra cosa que el órden que Dios ha determinado inmutablemente, prescribe al hombre leyes inmutables como ella; leyes necesarias porque son la espresion de relaciones necesarias. (LaMennais). El conocimiento de estas leyes es una gran luz, que nos pone delante de los ojos multitud de cosas, cuya existencia ignorabamos, aunque estuviesen quizá muy cerca de nosotros, y de cuyas utilidades no podiamos disfrutar á causa de las tinieblas en que estabamos sumergidos. El sistema de las propiedades esenciales de los números es inmutable, porque es el órden establecido por Dios en la composicion de ellos, bajo leyes inmutables y necesarias, que son la espresion de relaciones necesarias. El conocimiento de las leyes de este sistema es una gran luz, por cuyo medio descubrimos que entre tantas numeraciones que los hombres pueden disponer, estando en su arbitrio elegir cualquier número por base generativa, solo una es la natural, solo una es la que se conforma con el sistema natural de los números; así como de un punto á otro se pueden tirar cuantas líneas se quiera, sin que pueda haber mas que una sola recta. Es necesario, pues, que se establezca la numeracion natural, si queremos abrir el camino mas corto para las operaciones aritméticas, así á los matemáticos como á los profesores de artes y oficios, en que muy á menudo se hace uso de mitades, tercias, cuartas y sestas partes, las cuales se encuentran en los decimales naturales; y tambien á los comerciantes, que tratan por docenas ó gruesas, las cuales vienen á ser decenas y centenas segun la numeracion natural, y por consiguiente harán prontamente sus cálculos, pudiendo usar de las ventajas que ofrecen los decimales.

Es necesario que se establezca la numeracion natural, porque es el último grado de perfeccion á que puede llegar el arte de espresar los números.

Miéntras no se conozca la ciencia con que se esplica toda la teoría de un arte, no puede este llegar á su perfeccion; lo que á mi entender se demuestra del modo siguiente.

Ciencia es el conocimiento claro y cierto del verdadero estado, naturaleza, propiedades y relaciones de alguna cosa, fundado sobre principios evidentes por si mismos ó sobre demostraciones. Los objetos de las ciencias son independientes del hombre, en cuanto no son obras ni efectos de su habilidad ni de su ingenio.

Arte es el conocimiento de los elementos ó producciones naturales, y del modo de considerarlos, prepararlos, transformarlos ó combinarlos para hacer ó conseguir alguna cosa.

No puede ser objeto del arte lo que no es útil para nuestra conservacion, para nuestra perfeccion, para nuestra comodidad ó para nuestro placer. Estas necesidades nos obligan á buscar los medios de satisfacerlas; mas no sabemos todas las propiedades ni en que consisten la regularidad, la perfeccion, las relaciones de los elementos ó producciones naturales de que podemos servirnos, ni el mejor modo de prepararlos, transformarlos &c., y de aquí viene que las artes al principio siempre son imperfectas. A las observaciones y razonamientos que hacemos con la práctica de ellas así imperfectas, se debe el descubrimiento de las ciencias, y á estas se, debe luego la perfeccion de las artes.

Nuestra utilidad es, pues, el orígen de las artes, y por ellas descubrimos las ciencias; porque toda ciencia es la teoría de algun arte, y todo arte se refiere á nuestra utilidad, que es el fin ú objeto de ellas.

La necesidad de guarecernos de la intemperie nos obliga á hacer casas, que al principio son chozas formadas con palos, ojas, paja, palmas, barro, es decir, con los materiales que primero encontramos, sin atender siquiera á la calidad de ellos; estas habitaciones son muy débiles, muy imperfectas y nada cómodas; pero ya tenemos idea de casa, y tratamos de mejorarla todo lo posible, hasta que descubrimos la arquitectura, que es el arte de oonstruirlas con la firmeza, euritmia., simetría y adornos que mas convienen á su destino.

Así, pues, la necesidad de espresar los números, obliga á los hombres á formar la numeracion con la base que encuentran mas á mano, que es el número de los dedos: acostumbrados á esta numeracion, no era fácil pensar que pudiera haber otra mejor, y mucho menos cuando con ella se iban profundizando las matemáticas y adelantando muchas artes, hasta que por fin ha servido para descubrir el sistema natural de los números, la ciencia de sus propiedades esenciales ó natural composicion, que nos manifiesta la base propia de la numeracion, cuyos signos espresan á la vez el número y sus propiedades esenciales. Siendo este el último grado de perfeccion á que puede llegar el arte de espresar los números, es necesario que se establezca la numeracien natural; porque así lo exige nuestra utilidad y porque así lo exigen imperiosamente las luces del siglo, en que tanto se trabaja por hallar el sistema natural ó sea el órden, enlace y relaciones de los principios en todas las ciencias y artes. En esta empresa trabajaron ya algunos sabios en el último siglo, y al fin dijeron lo siguiente.

«Bien léjos de percibir la cadena que une todas las ciencias, no vemos en su totalidad siquiera las partes de esta cadena que constituyen cada ciencia en particular. En la deduccion las proposiciones siempre se hallan vacíos que la interrumpen; porque no todas son consecuencias inmediatas, sino que forman, por decirlo así, grupos diferentes y desunidos." En mi concepto no hay ninguna *cadena* que una todas las ciencias, ni aun las proposiciones de una misma en particular, y por consiguiente es inútil buscarla. Mas no creo que sean perdidos los trabajos de los literatos que se dediquen á descubrir ó conocer mejor el *árbol* de los conocimientos humanos. La inteligencia es la raiz de este árbol, y la esperiencia ó sea la observacion de la naturaleza es el tronco, de donde salen las ramas que son las ciencias y artes ó mejor diré, las artes, cuyas teorías son las ciencias. En cada rama concluye un órden de ojas ó sea de proposiciones, de principios, de verdades, y es inútil pretender que de la última oja nazca otra rama. Búsquese el órden de materias y en cada una de estas el órden ó enlace de sus verdades. Si las ojas nose siguen inmediatamente, sino que forman grupos diferentes y desuuidos, es una prueba de que es malo ó escaso el jugo que esta rama recibe de la raiz, ó que hay algun defecto en el tronco.

HABLAR, CONTAR Y MEDIR son las tres cosas que primero aprenden los hombres, desde que empiezan á civilizarse, porque indispensablemente han de practicarlas mucho en el trato social. El que no sabe hablar, no puede contar; y el que á la vez no sabe hablar y contar, no puede medir. Luego la primera rama del árbol de los conocimientos humanos es la *elocuencia*, el arte de espresar nuestros pensamientos con toda propiedad y exactitud. Esta hermosa rama se forma de tres, que son: gramática, lógica y retórica, y de cada una de estas salen otras mas pequeñas. Siendo conocido la *numeracion* que sale de la gramática, no es necesario que se posean las demas de la elocuencia, para que se produzca la segunda rama principal, que es la aritmética: tambien esta se compone de tres, que son la *aritmética inferior*, que se reduce á las cuatro reglas; la *aritmética superior*, que trata de las proporciones, progresiones, potencias, series y arte combinatoria, y la *aritmética sublime*, que es el *álgebra*. Segun la estension de esta segunda rama principal, se producirá y estenderá la tercera, la *geometría* (arte de medir), que. asimismo consta de tres: *longimetría*, *planometría* y *estereometría*.

El que llegue á poseer completamente las nueve artes de las tres ramas principales, puede llamarse sabio; porque sabe aprender, sabe investigar la naturaleza, podrá descubrir el órden de las demas ramas de los conocimientos humanos, y las principales ojas de cada una, y todas las de aquella que se proponga seguir. Mas como no se puede poseer la geometría en toda su estension, si no se conoce perfectamente la aritmética, y esto es imposible, si no se establece la numeracion natural, único medio de descubrir secretos importantes acerca de los números, como se ha visto en el cap. 14; se sigue que es de absoluta necesidad establecer cuanto ántes la numeracion natural, si queremos marchar luego por el camino de la perfeccion de las ciencias, hasta llegar á conocer la *constitucion natural de la sociedad humana*, que es la que mas nos interesa.

Daniel anunció un reino en parte de hierro y en parte de barro cocido, esto es, en parte firme y en parte quebradizo; el hierro y el tiesto de barro se mezclarán por medio de parentelas, mas nunca se ligarán. Y en aquellos dias Dios levantará un reino que no será jamas destruido, y no pasará á otro pueblo, sino que quebrantará y acabará todos los reinos anteriores, y subsistirá para siempre. Esto significa la piedra que sin mano se desgajó del monte y desmenuzó el tiesto y el hierro, y el cobre y la plata y el oro.

Si por el hierro se representan principio de la soberanía de un hombre solo, y por el tiesto el de la soberanía del pueblo, es claro que jamas podrán unirse estos dos principios, por mas que sus secuaces se mezclen por medio de parentelas; y es claro tambien que no podemos durar mucho tiempo en este estado. Es preciso que del monte de las ciencias se desgaje la constitucion natural de la sociedad humana. Esta constitucion no se adoptará seguramente por ninguna de las grandes naciones, sino por alguna de las mas pequeñas y quizá por una sociedad particular; pero crecerá de un modo portentoso, como la pequeña fuente que vió Mardoqueo. (Esther cap. 11).

Es grande sin duda el pensamiento del P. Lacumsa de que al fin el mismo Cristo gobernará la tierra, en lo cual no dejan de convenir muchos grandes teólogos; pero se equivocó muchísimo en creer que sea Roma la mujer ramera, la gran ciudad de que habla el apocalípsis (cap. 17 y 18), cuyos caractéres se resumen en estas palabras: «*Porque tus mercaderes eran los príncipes. de la tierra: porque en tus hechicerías erraron todas las gentes.*” Estas dos cosas no convienen á Roma de ningun modo. Tambien se equivocó el P. Lacumsa en decir que el pueblo judío es la muier cubierta del sol con la luna debajo de sus pies, de cuya interpretacion desconfia, porque no sabe qué significa la luna. Si no puede negarse que la luz del Evangelio cae sobre el pueblo judío, y que este pueblo la reflecta como la luna reflecta la luz del sol, se sigue que es la sinagoga la luna que está debajo de los pies de la verdadera Iglesia de Jesucristo; siendo esta la que ha concebido y sufre dolores por parir el reino que hará felices á los hombres.

La bendicion, y la claridad y sabiduria, y la accion de gracias, y la honra, y la virtud, y la fortaleza á nuestro dios en los siglos de los siglos. Amen.

Apoc. cap. 7, *ver.* 12.

Notaciones

En cualquier libro de tamaño significativo, los errores son probables. Incluso en la impresión inicial de este libro, Señor Pujals incluye una página de "Errata" contiene varios errores en el texto. Esta edición corrige esos errores en sus lugares; por lo tanto, no hay necesidad de tal página aquí. Señor Pujals, sin embargo, se perdió algunos errores, que también hemos corregido en sus lugares, y que se enumeran a continuación.

- En la página 3, corregí "236" a "256."
- En la página 6, corregí "Quillion" a "Quintillion."
- En la página 52, corregí "$4 \times 4 = 24$" a "$4 \times 4 = 14$".
- En la página 52, corregí "pirmer facar" a "primer facar".
- En la página 53, corregí "$2 \times 8 = 41$" a "$2 \times 8 = 14$".
- En la página 53, corregí "$8 \times 4 = 38$" a "$8 \times 4 = 28$".

Este texto ha sido componer completamente nueva, sin la reproducción de la original, mediante el reconocimiento óptico de caracteres de un programa de software libre llamado `tesseract` y corregier manualmente los errores en esta transcripción. El diseño del libro fue hecho con LaTeX, además de varios de sus paquetes, incluyendo `inputenc`, `tocloft`, `wrapfig`, `array`, `longtable`, `supertabular`, `amsmath`, `parcolumns`, `yfonts`, `multirow`, `url`, `booktabs`, `calligra`, `graphicx`, `color`, `lettrine`, `fontenc`, `babel`, `teubner`, `lmodern`, `ctib`, `dozenal`, `geometry`, `fancyhdr`, `cjhebrew`, `skt`, and `slantsc`. El texto es principalmente en la fuente Latin Modern de doce puntos con quince puntos de liderazgo; esta fuente es basada en el Computer Modern de Donald E. Knuth. Otras fuentes en el texto son Haralambous Fraktur, la fuente de hebreo de Christian Justen, las Devanagari (Samscrita) fuentes de Charles Wikner, la fuente tibetano de Sam Sirlin, la fuente griega de Claudio Beccari, et otras.

Este texto fue puesto a dispoción por Google Books (http://books.google.com), y este edicion se precia dada al mundo por la Sociedad dozenal de América (http://www.dozenal.org).